М.Г.Карповский, Э.С.Москалев

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КОДИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЙ АВТОМАТА

I. Задачу построения произвольного цифрового устройства можно рассматривать как задачу построения некоторого конечного автомата с памятью /I/. Построение такого автомата разбивается, как правило, на три этапа: этап абстрактного структурного и комбинационного синтеза. На этапе структурного синтеза наиболее важной задачей является задача нахождения такого кодирования состояний автомата, при котором реализация комбинационной части осуществлялась бы с минимальной сложностью /I/. В зависимости от выбора кодирования сложность реализации комбинационной части может меняться в несколько раз. Нахождение оптимального кодирования, дающего минимальную сложность реализации комбинационной части, перебором по всем кодированиям практически неосуществимо даже при использовании современных цифровых вычислительных машин уже при числе состояний автомата свыше IO. Поэтому в литературе /2, 3/ рассматриваются алгоритмы нахождения кодирования, в той или иной степени приближающиеся к оптимальному. Однако эти алгоритмы достаточно сложны и не позволяют оценить степень приближения найденного кодирования к оптимальному.

Трудности в нахождении оптимального кодирования обусловлены тем, что по виду различных систем булевых функций, которые получаются при различных кодированиях одного и того же автомата, весьма трудно оценить сложность реализации комбинационной части. Нахождение, например, минимальной дизъюнктивной нормальной формы даже для одной булевой функции требует большого объема вычислительных работ.

В настоящей работе во-первых предлагается такой метод реализации одной или системы булевых функций, который

позволяет достаточно просто по виду функций оценить сложность реализации. По этому методу заданная функция представляется в виде дизъюнкции или суммы по модулю два некоторых базисных конъюнкций аргументов. Выбор системы базисных функций определяется простотой их реализации и простотой определения минимального числа базисных конъюнкций для реализации одной булевой функции непосредственно по ее таблице истинности.

Во-вторых формулируются требования на кодирование и предлагается алгоритм кодирования состояний автомата, при котором сложность реализации комбинационной части рассматриваемым методом, достигает некоторого минимума.

2. Рассмотрим следующую систему конъюнкций $\{M_i^{(j)}(x_1,x_2,\dots,x_m)\}$

$$M_0^{(0)}=1;\ M_1^{(0)}=\bar{x}_1;\ M_1^{(1)}=x_1;\ M_2^{(0)}=\bar{x}_1\bar{x}_2;\ M_2^{(1)}=\bar{x}_1x_2;$$

$$M_2^{(2)}=x_1\bar{x}_2;\ \ M_2^{(3)}=x_1x_2;\ \dots$$

$$M_i^{(j)}=\mathop{\&}_{s=1}^{i}x_s^{\alpha_s},\ \text{где}\ j=\sum_{s=1}^{i}\alpha_s 2^{s-1};\ \alpha_s\in\{0,1\}\qquad\text{(I)}$$

$$(i=0,1,\dots,m;\ j=0,1,\dots,2^i-1).$$

Систему (I) выберем в качестве базисной для реализации произвольной системы булевых функций от аргументов $x_1,x_2,\dots x_m$. Система (I) достаточно просто может быть реализована с помощью пирамидального дешифратора со сложностью $2^{m+1}L_{\&}$[1].

Любая булева функция может быть представлена в виде

$$y(x_1,\dots,x_m)=\bigvee_{i=0}^{m}\bigvee_{j=0}^{2^i-1}c_i^{(j)}M_i^{(j)}(x_1,\dots,x_m)\qquad(2)$$

$$c_i^{(j)}\in\{0,1\}$$

(В частности, таким представлением является СДНФ $y(x_1,\dots,x_m)$

Отметим, что представление y в виде (2) аналогично разложению функций y в ортогональный ряд по базису Хаара /4/.

Коэффициенты $C_i^{(j)}$ будем определять следующим образом. Рассмотрим частичную сумму ряда

$$S_i^{(j)}(x_1,\dots,x_m)=\bigvee_{k=0}^{i-1}\bigvee_{s=0}^{2^k-1}c_k^{(s)}M_k^{(s)}(x_1,\dots,x_m)\vee\bigvee_{s=0}^{j-1}c_i^{(s)}M_i^{(s)}(x_1,\dots,x_m)$$

и положим

$$C_i^{(j)}=\begin{cases}\text{I, если } M_i^{(j)}(x_1,\dots,x_m)(y(x_1,\dots,x_m)\oplus S_i^{(j)}(x_1,\dots,x_m)), M_i^{(j)}(x_{\dots}\\ \text{0 в противном случае.}\end{cases}$$

(Здесь и далее „$\oplus$" означает покомпонентную сумму по модулю 2 2^m - разрядных двоичных векторов).

Нетрудно показать, что при такой процедуре определения коэффициентов $C_i^{(j)}$ равенство (2) выполняется для любых наборов $(x_1,\dots,x_m)$ и для любого фиксированного набора $(x_1,\dots,x_m)$ правая часть (2) содержит не более одного ненулевого слагаемого. Кроме того

$$C_i^{(2j)}\cdot C_i^{(2j+1)}=0 \qquad (i=1,\dots,m;\ j=0,1,\dots,2^{i-1}-1) \tag{5}$$

Формулы (2) и (4) дают универсальный метод реализации булевых функций в базисе „$\vee$", „&", "НЕ".

Будем считать сложность реализации булевых функций монотонно-возрастающей функцией от числа L ненулевых коэффициентов $C_i^{(j)}$ ряда (2). Можно показать, что если заменить в (2) символ „$\vee$" символом „$\oplus$", то число ненулевых коэффициентов может только уменьшиться. При этом процедура определения коэффициентов изменяется следующим образом

$$C_i^{(j)}=\begin{cases}\text{I, если } \|y(x_1,\dots,x_m)\oplus S_i^{(j)}(x_1,\dots,x_m)\oplus M_i^{(j)}(x_1,\dots,x_m)\|\le\|\dots\\ \text{0 в противном случае,}\end{cases} \tag{6}$$

где $\|f(x_1,\dots,x_m)\|$ означает число импликант.

При этом, как и ранее, для любых наборов $(x_1,\dots,x_m)$ выполняются равенства (2), (3) и (5), в которых знак „$\vee$" заменен на „$\oplus$". Однако в этом случае для любого фиксированного набора $(x_1,\dots,x_m)$ правая часть равенства (2) содержит не более m слагаемых.

Основным достоинством предложенного метода реализации булевых функций с помощью разложения (2) является простота расчета коэффициентов $C_i^{(j)}$, что, в частности, дает возможность сформулировать требования к оптимальному кодированию состояний абстрактного автомата с точки зрения простоты реализации его комбинационной части.

3. Рассмотрим эту задачу более подробно.

Пусть задан абстрактный автомат своей таблицей переходов (таблица I).

	z_1 . . . . z_{n_z}
a_1	$a_{1,1}$ . . . . a_{1,n_z}
⋮	⋮
a_{n_a}	$a_{n_a,1}$ . . . . a_{n_a,n_z}

Таблица I.

Здесь a_i - внутренние состояния автомата, z_j - входные сигналы $(i=1,\dots,n_a=2^m;\ j=1,\dots,n_z)$

Введем следующие обозначения

$$A_i^{(0)}=(a_{i,1}\dots a_{i,n_z}) \quad i=1,2,\dots,n_a \tag{7}$$

$$A_i^{(1)}=\begin{pmatrix}a_{2i-1,1} & \dots & a_{2i-1,n_z}\\ a_{2i,1} & \dots & a_{2i,n_z}\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$i=1,2,\dots,\frac{n_a}{2}.$$

$$A_i^{(s)}=\begin{pmatrix}a_{2^si-2^s+1,1} & \dots & a_{2^si-2^s+1,n_z}\\ a_{2^si-2^s+2,1} & \dots & a_{2^si-2^s+2,n_z}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{2^si,1} & \dots & a_{2^si,n_z}\end{pmatrix} \quad i=1,2,\dots,\frac{n_a}{2^s} \tag{9}$$

Множество состояний $j^{\text{го}}$ столбца матрицы $A_i^{(s)}$ обозначим $A_{ij}^{(s)}$ $(s=0,1,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n_z)$.

Определим расстояния ρ в множестве матриц $\{A_i^{(s)}\}$ следующим образом $(i=1,2,\dots,\frac{n_a}{2^s};\ s=1,2,\dots,m-1)$:

$$\rho(A_p^{(s)},A_q^{(s)})=\sum_{j=1}^{n_z}\rho(A_{pj}^{(s)},A_{qj}^{(s)}), \quad \text{где}$$

$$\rho(A_{pj}^{(s)},A_{qj}^{(s)})=\frac{1}{2|A_{pj}^{(s)}|}+\frac{1}{2|A_{qj}^{(s)}|}-\frac{2}{2|A_{pj}^{(s)}\cup A_{qj}^{(s)}|}, \tag{II}$$

где $|A_{ij}^{(s)}|$ - число различных элементов в $A_{ij}^{(s)}$.

Введенное таким образом расстояние на множестве матриц удовлетворяет всем аксиомам метрики и является обобщением метрики Хэмминга, которая получается из (II) при $a_i \in \{0,1\}$, $s=0$ т.е. при $n_a=2$.

Произвольное кодирование автомата можно задать в виде $A_{i_1}^{(0)}, A_{i_2}^{(0)}, \ldots, A_{i_{n_a}}^{(0)}$ при этом a_s $(s=1,2,\ldots,n_a)$ кодируются двоичными наборами $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$, где $\sum_{j=0}^{m-1} b_j 2^j = i_s$

Пусть задано некоторое кодирование состояний автомата. Без ограничения общности можно считать, что это кодирование задано в виде $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_{n_a}^{(0)}$

Обозначим L – число ненулевых коэффициентов в разложении (2) системы булевых функций, описывающих работу комбинационной части автомата при выбранном кодировании.

<u>Теорема</u>

При $m \to \infty$

$$L \sim m \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n_a/2^{s+1}} \rho(A_{2i-1}^{(s)}, A_{2i}^{(s)}) + m \sum_{j=1}^{n_x} \frac{1}{2|A_{xj}^{(m)}|}. \qquad \text{(I2)}$$

Из теоремы следует, что оптимальным кодированием с точки зрения минимума L, а, следовательно, с точки зрения минимума сложности комбинационной части автомата, является кодирование, для которого величина $\sum_{s=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n_a/2^{s+1}} \rho(A_{2i-1}^{(s)}, A_{2i}^{(s)})$ достигает минимума. Так как из (I)) $0 \le \rho(A_{2i-1}^{(s)}, A_{2i}^{(s)}) \le 1/2\, m \cdot n_x$ то минимум величины L будем искать следующим образом.

а) Найдем множество кодирований K_0, для которых величина $L_0 = \sum_{i=1}^{n_a/2} \rho(A_{2i-1}^{(0)}, A_{2i}^{(0)})$ достигает минимума.

б) Найдем множество кодирований $K_I \subseteq K_0$, для которых величина $L_1 = \sum_{i=1}^{n_a/4} \rho(A_{2i-1}^{(1)}, A_{2i}^{(1)})$ достигает минимума и т.д.

s) Найдем множество кодирований $K_s \subseteq K_{s-1}$, для которых величина $L_s = \sum_{i=1}^{n_a/2^{s+1}} \rho(A_{2i-1}^{(s)}, A_{2i}^{(s)})$ достигает минимума.

Найденное таким образом кодирование дает абсолютный минимум для величины L_0 и некоторые условные минимумы для величин L_s, $s=1,2,\ldots,m-1$.

Для нахождения множества K_s, $s=0,1,\ldots,m-1$

используется следующая рекуррентная процедура. По таблице переходов (таблица I) строится матрица расстояний $M^{(0)} = \{M_{ij}^{(0)}\}$ где $M_{ij}^{(0)} = \rho(A_i^{(0)}, A_j^{(0)})$. Далее с помощью венгерского алгоритма /5/ находятся n_a элементов $M_{1,s_2}^{(0)}, M_{s_3,s_4}^{(0)}, \ldots, M_{s_{n_a-1},s_{n_a}}^{(0)}$ (образующих {i}) матрицы $M^{(0)}$ такие, что $\sum_{i=1}^{n_a/2} M_{s_{2i},s_{2i+1}}^{(0)}$ достигает минимума, причем покрывающих $(1, S_1, \ldots, S_{n_a})$. Тогда множество K_0 образуют те кодирования, для которых

$$A_{2i-1}^{(0)} = A_{s_{2i-1}}^{(0)};\ A_{2i}^{(0)} = A_{s_{2i}}^{(0)};\ (i=1,\ldots,\frac{n_a}{2})$$

Выберем из множества K_0 произвольное кодирование и составим для него матрицу расстояний $M^{(1)} = \{M_{ij}^{(1)}\}$, где $M_{ij}^{(1)} = \rho(A_i^{(1)}, A_j^{(1)})$. Аналогично предыдущему найдем с помощью венгерского алгоритма множество K_I и т.д.

4. Пример.

а) Пусть задан автомат с 8-ю входами и 8-ю внутренними состояниями ($m=3$) со следующей таблицей переходов (таблица 2). Матрица расстояний $M^{(0)}$ приведена в таблице 3. С помощью венгерского алгоритма находим

$$M_{s_1,s_2}^{(0)} = M_{1,7}^{(0)} = 2;\ M_{s_3,s_4}^{(0)} = M_{2,5}^{(0)} = 2{,}5;\ M_{s_5,s_6}^{(0)} = M_{3,6}^{(0)} = 1;\ M_{s_7,s_8}^{(0)} = M_{4,8}^{(0)} = 1{,}5$$

Выберем произвольное кодирование из множества K_0, например $A_1^{(0)}, A_7^{(0)}, A_2^{(0)}, A_5^{(0)}, A_3^{(0)}, A_6^{(0)}, A_4^{(0)}, A_8^{(0)}$. Для этого кодирования $L_0 = 2 + 2{,}5 + I + I{,}5 = 7$.

б) Для выбранного кодирования

$$A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1^{(0)} \\ A_7^{(0)} \end{pmatrix};\ A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} A_2^{(0)} \\ A_5^{(0)} \end{pmatrix};\ A_3^{(1)} = \begin{pmatrix} A_3^{(0)} \\ A_6^{(0)} \end{pmatrix};\ A_4^{(1)} = \begin{pmatrix} A_4^{(0)} \\ A_8^{(0)} \end{pmatrix}$$

Составим далее матрицу $M^{(1)}$ с расстояниями $\rho = (A_i^{(1)}; A_j^{(1)})$ (таблица 4). С помощью венгерского алгоритма находим

$$M_{s_1,s_2}^{(1)} = M_{1,3}^{(1)} = 9/4;\ M_{s_3,s_4}^{(1)} = M_{2,4}^{(1)} = 9/4$$

Выберем произвольное кодирование из множества K_I, например,

$$A_1^{(0)}, A_7^{(0)}, A_3^{(0)}, A_6^{(0)}, A_2^{(0)}, A_5^{(0)}, A_4^{(0)}, A_8^{(0)}$$

Для этого кодирования $L_1 = 9/4 + 9/4 = 9/2$

в) Множество K_2 совпадает с множеством K_I. Следовательно, кодирование, найденной в предыдущем пункте, является искомым. При этом $L_2 = \cancel{25/16}\ 5/4$ Отсюда

$L = 3\cdot 12\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{11}{8} = 42\frac{3}{8}$

$L_0 + L_1 + L_2 = 7 + \frac{9}{2} + \frac{5}{4} = 12\frac{3}{4}$ и $\cancel{L = 3\cdot 12\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{11}{8} = 42\frac{3}{8}}$

Следовательно, при выбранном кодировании число ненулевых коэффициентов разложения (2) системы булевых функций, описывающих работу комбинационной части, должно быть примерно равно ~~40~~ 43.

г) При выбранном кодировании $A_1, A_2, A_3, A_6, A_7, A_5, A_4, A_8$ состояния автомата кодируются следующим образом (таблица 5). Булевы функции $У_I - У_{24}$, описывающие работу комбинационной части при этом кодировании, задаются таблицей 6. Коэффициенты разложения булевых функций $У_I$-$У_{24}$ в ряд (2) по формулам (4) и (6) приведены в таблице 7.

Как видно из таблицы 7 число ненулевых коэффициентов при разложении булевых функций по формулам (2) и (4) и по формулам (2) и (6) в данном случае совпадает и равно 43. Это хорошо согласуется с предварительной оценкой, полученной в п. в).

5. Заключение.

В настоящей работе предлагаются два метода реализации булевых функций в базисах "И", "ИЛИ", "НЕ" и "И", "Не" и "⊕". При использовании этих методов сложность реализации булевых функций может быть просто оценена непосредственно по их таблицам истинности. Это дало возможность предложить эффективный метод определения кодирования внутренних состояний абстрактного автомата, при котором сложность реализации комбинационной части предложенными методами достигает некоторого условного минимума. Для этого вводятся расстояния между системами строк таблицы переходов абстрактного автомата и задача определения оптимального кодирования решается с помощью венгерского алгоритма. Аналогичным образом может быть решена задача об оптимальном кодировании входных сигналов, если вводить расстояния между системами столбцов таблицы переходов.

Литература

1. Лобринский Н.Е., Трахтенброт Б.А. "Введение в теорию конечных автоматов", Физматгиз, 1962 г.
2. Armstrong. On the efficient assignment of internal codes to sequential machines. IRE Trans EC-11, №4 1962.
3. Hartmanis. On the assignment problem for digital computer circuits. IRE Trans EC-10, №2 1962.
4. Качмаж и Штейнгауз "Теория ортогональных рядов", ГИФМЛ, 1958 г.
5. А.Кофман, "Методы и модели исследования операций", "Мир", 1966 г.