Ю. Г. КАРПОВ, М. Г. КАРПОВСКИЙ

ДЕКОМПОЗИЦИЯ АЛГЕБР И СИНТЕЗ НАДЕЖНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ ИЗ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ

УДК 51.621.391

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Информация в дискретных устройствах (ДУ) представляется конечным множеством A символов, а алгоритм ее обработки определяется последовательностью операций над символами. Часто функционирование ДУ может быть описано моделью конечной (универсальной) алгебры [1] $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ с носителем A и совокупностью операций Ω. Например, для конечного детерминированного автомата (A, X, δ), выход которого совпадает с состоянием (A — алфавит состояний, X — входной алфавит, $\delta : A \times X \to A$ — функция переходов), соответствующая алгебра строится следующим образом. Носитель алгебры совпадает с алфавитом состояний и $\Omega = \{\omega_i : A \to A \mid \omega_i(a) = \delta(a, x_i),\ a \in A,\ x_i \in X,\ i = 1, \ldots, |X|\}$, где $|X|$ — мощность X.

Дискретное устройство $R_{\mathfrak{A}}$ и алгебру $\mathfrak{A}$, описывающую функционирование $R_{\mathfrak{A}}$, назовем соответствующими; $R_{\mathfrak{A}}$ назовем аппаратурной реализацией алгебры $\mathfrak{A}$.

Определение 1. Пусть даны две однотипные [1] алгебры $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{A}, \Omega)$ и $\mathfrak{A} = (\bar{A}, \Omega)$. Будем говорить, что $\overline{\mathfrak{A}}$ моделирует $\mathfrak{A}$, если существует гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}$ некоторой подалгебры $\mathfrak{D} = (B, \Omega)$ алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что $\overline{\mathfrak{A}}$ слабо моделирует $\mathfrak{A}$ относительно разбиения $\pi_\Omega = \{\Omega_j\}_{j \in I}$ множества Ω, если существуют множество B $(B \subseteq A)$ и гомоморфизмы $\varphi_j : B \to A$ для всех $j \in I$ такие, что в каждой из алгебр $\overline{\mathfrak{A}}_j = (\overline{A}, \Omega_j)$ B порождает подалгебру $\mathfrak{D}_j = (B, \Omega_j)$ и $\varphi_j : \mathfrak{D}_j \to \mathfrak{A}_j$ — гомоморфизм алгебр ($\mathfrak{A}_j = (A, \Omega_j)$).

Возможные сбои и отказы ДУ могут привести к ошибочному функционированию ДУ, а следовательно к изменению структуры [1] (т. е. к изменению характера операций без изменения их арностей) соответствующей алгебры. Класс ошибок $G = \{\gamma_s\}_{s \in S}$ аппаратурной реализации $R_{\overline{\mathfrak{A}}}$ алгебры $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{A}, \Omega)$ порождает множество однотипных с $\overline{\mathfrak{A}}$ алгебр $\{\overline{\mathfrak{A}}_s = (\overline{A}, \Omega^{(s)})\}_{s \in S}$, причем $\overline{\mathfrak{A}}_s$ соответствует ДУ $\overline{R}_{\mathfrak{A}}$ с ошибкой γ_s. Таким образом, ошибку γ_s можно представить как однозначное отображение $\gamma_s : \Omega \to \Omega^{(s)}$ такое, что если $\gamma_s(\omega) = \omega^{(s)}$ $(\omega \in \Omega)$, $\omega^{(s)} \in \Omega^{(s)}$), то $\omega^{(s)}$ та операция на $\overline{A}$, которая получается из ω при соответствующем изменении структуры $\overline{\mathfrak{A}}$.

Для произвольной алгебры $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ обозначим: $\Omega(A) = \{\omega(a_1, \ldots, a_n) \mid \omega \in \Omega, a_i \in A, i = 1, \ldots, n\}$ — множество образов всех операций из Ω.

Определение 2. Будем говорить, что алгебра $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{A}, \Omega)$ слабо моделирует алгебру $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ относительно разбиения $\pi_\Omega = \{\Omega_j\}$ множества Ω при наличии множества ошибок $G = \{\gamma_s\}_{s \in S}$, если $\overline{\mathfrak{A}}$ слабо моделирует $\mathfrak{A}$ и для любой алгебры $\overline{\mathfrak{A}}_{js} = (\overline{A}, \Omega_j^{(s)})$ и любой n-арной операции $\omega^{(s)} \in \Omega^{(s)}$ существует гомоморфизм $h_j : \{\Omega_j^{(s)}(A)\}_{s \in S} \to \Omega_j(A)$ такой, что из $\gamma_s(\omega) = \omega^{(s)}$ и

$$h_j(\omega(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)) = \omega(a_1, \ldots, a_n)\ (\omega \in \Omega_j,\ a_i \in A,\ \overline{a}_i \in \overline{A})$$

следует, что для любой ошибки $\gamma_s \in G$

$$h_j(\omega^{(s)}(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)) = \omega(a_1, \ldots, a_n). \qquad (1)$$

Если при этом разбиение π_Ω состоит из единственного блока, включающего все элементы из Ω, то будем говорить, что $\overline{\mathfrak{A}}$ моделирует $\mathfrak{A}$ при наличии множества ошибок G.

Для аппаратурных реализаций $R_{\mathfrak{A}}$ и $\overline{R}_{\mathfrak{A}}$ алгебр $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ условие (1) означает, что существуют гомоморфизмы h_j выходного алфавита $R_{\mathfrak{A}}$ на выходной алфавит $R_{\mathfrak{A}}$ такие, что если $\overline{R}_{\mathfrak{A}}$ и $R_{\mathfrak{A}}$ реализуют в данном такте операцию из Ω_j, то при любой ошибке из G устройство $\overline{R}_{\mathfrak{A}}$ реализует при гомоморфизме h_j соотношение вход—выход устройства $R_{\mathfrak{A}}$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Интегральный модуль с точки зрения надежности обычно ведет себя в схеме как единый компонент, надежность которого слабо зависит от его внутренней сложности. Поэтому задача надежностного синтеза ДУ из интегральных модулей сводится к такой декомпозиции ДУ, чтобы при неверном функционировании не более заданного числа d любых модулей ДУ в целом было способно реализовать заданное соотношение вход-выход. При этом желательно разбивать ДУ на независимо работающие подустройства, поскольку с увеличением количества используемых компонент надежность ДУ снижается и, кроме того, возрастает опасность «размножения» ошибок.

Декомпозиция ДУ на независимые модули сводится к декомпозиции соответствующей алгебры или некоторого ее расширения в прямое произведение однотипных алгебр, а задачу надежностного синтеза можно толковать следующим образом. Пусть $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{A}, \Omega) = \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i$ — прямое произведение однотипных алгебр и $\overline{\mathfrak{A}}$ описывает функционирование m-компонентного ДУ $\overline{R}_{\mathfrak{A}}$. Обозначим $\Gamma(\overline{\mathfrak{A}}, d)$ множество алгебр, отличающихся от $\overline{\mathfrak{A}}$ произвольным изменением структуры не более d любых компонентных алгебр, и $G_d = \{\gamma_s : \Omega \to \Omega^{(s)} \mid \overline{\mathfrak{A}}_s = (\overline{A}, \Omega^{(s)}) \in \Gamma(\overline{\mathfrak{A}}, d)\}$. Задача надежностного синтеза ДУ из независимых модулей сводится к задаче нахождения по соответствующей алгебре $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ такой алгебры $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{A}, \Omega)$, которая разлагается в прямое произведение минимального числа алгебр и (слабо) моделирует $\mathfrak{A}$ при наличии множества ошибок G_d. При этом $\gamma_s \in G_d$ можно рассматривать как ошибку кратности не выше d в $\overline{R}_{\mathfrak{A}}$ (под кратностью ошибки в m-компонентном ДУ понимается число ошибочно функционирующих компонент).

Определение 3. Пусть заданы алгебры $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ и $\overline{\mathfrak{A}} = \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_i$ однотипны с $\mathfrak{A}$. Алгебру $\overline{\mathfrak{A}}$ будем называть $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой (слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой относительно разбиения π_Ω множества операций), если она (слабо) моделирует $\mathfrak{A}$ при наличии множества ошибок G_d.

Пусть $\overline{\mathfrak{A}} = \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i$, $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{A}, \Omega)$ слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчива относительно разбиения $\pi_\Omega = \{\Omega_j\}_{j \in I}$, причем $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$. Из определений 2,3 следует, что тогда для любой ошибки $\gamma_s \in G_d$ кратности не выше d существует подмножество B носителя алгебры $\overline{\mathfrak{A}}_s = (\overline{A}, \Omega^{(s)})$ и гомоморфизмы $h_j : B \to \Omega(A)$, удовлетворяющие (1). При этом B и h_j предполагаются не зависящими от того, какие компоненты $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$ и каким образом изменили свою структуру. Поэтому равенство (1) определяет процесс декодирования и коррекции ошибок в ДУ $\overline{R}_{\mathfrak{A}}$, соответствующем алгебре $\overline{\mathfrak{A}}$.

Понятие слабой $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивости дает возможность описать процесс коррекции ошибок в ДУ, для которого известно, какое подмножество $\Omega_j \subseteq \Omega$ операций в данный момент ДУ может реализовать. Это имеет место, например, в случае, когда работа ДУ описывается моделью конечного автомата, т. е. соответствующая алгебра имеет $|X|$ унарных операций $\omega_j(a) = \delta(a, x_j)$; в этом случае известно, какую из операций реализует ДУ в данный момент, и можно положить $\Omega_j = \{\omega_j\}$ [2]. Микропрограммные автоматы дают другой пример описания ДУ, в которых целесообразно использовать понятие слабой $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивости.

Если алгебра $\overline{\mathfrak{A}}$ $d_{\mathfrak{A}}$-устойчива, то для любого π_Ω она слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчива. Обратное верно, если гомоморфизмы h_j для всех j совпадают. Для одной и той же алгебры $\mathfrak{A}$ минимальная мощность носителя $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры всегда не меньше минимальной мощности носителя слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры для любого π_Ω.

Процесс декодирования в ДУ, описываемом слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгеброй, осуществляется в два этапа. Сначала определяется, к какому блоку разбиения π_Ω принадлежит выполняемая операция, затем реализуется соответствующий гомоморфизм h_j на алгебру $\mathfrak{A}_j = (A, \Omega_j)$, которая описывает работу ДУ в данном такте [2].

Далее в настоящей работе рассматриваются необходимые и достаточные условия существования и методы синтеза слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивых алгебр, представленных в виде $\overline{\mathfrak{A}} = \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i$ с минимальным числом сомножителей, при заданных ограничениях на мощности носителей алгебр $\mathfrak{A}_i$. Эти методы определяют соответствующие методы синтеза надежных ДУ из независимых модулей, сложность которых ограничена.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБО $d_{\mathfrak{A}}$—УСТОЙЧИВЫХ АЛГЕБР

Определение 4. Покрытие $\rho = \{A_i\}_{i \in I}$ носителя алгебры $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ назовем конгруэнтным, если для любой n-арной операции $\omega \in \Omega$

$$(\forall i_1, \ldots, i_n \in I)(\exists j \in I): \{\omega(a_1, \ldots, a_n) \mid a_k \in A_{i_k};\ k = 1, \ldots, n\} \subseteq A_j. \tag{2}$$

По любому конгруэнтному покрытию ρ алгебры $\mathfrak{A}$ можно построить фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\rho$, элементами носителя которой являются блоки покрытия ρ, а операции из Ω определяются в соответствии с (2): $(\forall i_1, \ldots, i_n \in I)\ \omega(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}) = A_j$.

Теорема 1. Пусть дана алгебра $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$. Для существования $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры, представимой в виде прямого произведения m однотипных с $\mathfrak{A}$ алгебр, необходимо и достаточно, чтобы на $\mathfrak{A}$ существовала система из m конгруэнтных покрытий $\rho_1, \ldots, \rho_m$ и гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}$ подалгебры $\mathfrak{D} = (B, \Omega)$ алгебры $\prod_{i=1}^{m} \mathfrak{A}/\rho_i$ на алгебру $\mathfrak{A}$, удовлетворяющий следующему условию. Пусть $a, b \in B$. Тогда, если $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ и $\varphi(a), \varphi(b) \dot{\in} \Omega(A)$, то элементы a и b должны различаться не менее чем в $2d+1$ проекциях. $\left(\text{Поскольку } B \subseteq \prod_{i=1}^{m} \rho_i, \text{ то } a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), b = (\beta_1, \ldots, \beta_m); \alpha_i, \beta_i \in \rho_i,\ i = 1, \ldots, m\right)$.

Необходимые и достаточные условия существования слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры формулируются полностью аналогично теореме 1.

Приведем теперь достаточные условия существования (слабо) $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивых алгебр (а следовательно, и ДУ с коррекцией ошибок).

Определение 5. Разделение ξ носителя алгебры $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ (т. е. [illegible]ное нерефлексивное бинарное отношение на A) назовем конгруэнтным разделением $\mathfrak{A}$, если ξ замкнуто относительно всех операций из Ω, т. е. для любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ и любых $a_i, b_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$,

$$(\omega(a_1, \ldots, a_n), \omega(b_1, \ldots, b_n)) \in \xi \to (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ (a_i, b_i) \in \xi. \tag{3}$$

Определение 6. Разделение ξ множества A и покрытие $\rho = \{A_i\}_{i \in I}$ этого множества будем называть соответствующими, если

$$(\forall a, b \in A)\,(a, b) \bar{\in} \xi \leftrightarrow (\exists j \in I): (a, b) \in A_j \times A_j.$$

Определение 7. Систему разделений $\xi_1, \ldots, \xi_m$ множества A назовем $f(a, b)$-полной, если для любых $a, b \in A$ $(a \neq b)$ существует не менее $f(a, b)$ разделений системы, включающих пару (a, b).

Теорема 2. Для данной алгебры $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ и данного целого неотрицательного d существует $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивая алгебра, представимая в виде прямого произведения m однотипных с $\mathfrak{A}$ алгебр, если на $\mathfrak{A}$ существует $f(a, b)$-полная система m конгруэнтных разделений, причем

$$f(a, b) = \begin{cases} 2d + 1 - (a, b) \in \Omega(A) \times \Omega(A), \\ 1 - \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. По системе конгруэнтных разделений $\xi_1, \ldots, \xi_m$ построим систему соответствующих конгруэнтных покрытий $\rho(\xi_1), \ldots, \rho(\xi_m)$ (такая система всегда существует). Покажем, что алгебра $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{A}, \Omega) = \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{A}/\rho(\xi_i)$ $\left(\text{где } \overline{A} = \prod_{i=1}^{m} \rho(\xi_i)\right)$ является искомой $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгеброй.

Покажем сначала, что $\overline{\mathfrak{A}}$ моделирует $\mathfrak{A}$. Сопоставим каждому $a \in A$ в $\overline{A}$ подмножество N_a таких элементов, что для каждого из них i-я проекция есть блок покрытия $\rho(\xi_i)$, содержащий a. (Если $\rho(\xi_i)$ являются разбиениями, то множества N_a содержат в точности по одному элементу). Отметим, что если $\bar{a} \in N_a$ и $\bar{b} \in N_b$ $(a, b \in A,\ a \neq b)$, то $\bar{a}$ отличается от $\bar{b}$ не менее чем в $f(a, b)$ проекциях. Поскольку $f(a, b) \geq 1$, то $\forall a, b \in A,\ a \neq b \to N_a \cap N_b = \varnothing$. Следовательно, бинарное отношение $\varphi \subseteq \overline{A} \times A$, $\varphi = \bigcup_{a \in A} \{N_a \times \{a\}\}$ является отображением множества $B = \bigcup_{a \in A} N_a \subseteq \overline{A}$ на A. Из того, что $\rho(\xi_1), \ldots, \rho(\xi_m)$ конгруэнтны и операции в $\overline{\mathfrak{A}}$ совершаются покомпонентно, следует, что $\mathfrak{D} = (B, \Omega)$ — подалгебра $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\varphi: \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}$ — гомоморфизм алгебр.

Построим теперь для всех $\overline{a}\in\overline{A}$ сферы $Q_{\overline{a}}\subseteq\overline{A}$ множества элементов из $\overline{A}$, отличающихся от $\overline{a}$ не более чем в d проекциях. Положим $C_a=\bigcup_{\overline{c}\in N_a} Q_{\overline{c}}$, $C=\bigcup_{a\in\Omega(A)} C_a$. Из (4) следует, что если $a, b\in\Omega(A)$ и $a\neq b$, то $C_a\bigcap C_b=\varnothing$. При любой ошибке из $G_d=\{\gamma_s\}_{s\in S}$ кратности не выше d в прямом произведении $\overline{\mathfrak{A}}=\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{A}/\rho(\xi_i)$ изменят свою структуру не более d компонентных алгебр и $\overline{\mathfrak{A}}=(\overline{A}, \Omega)$ перейдет в алгебру $\overline{\mathfrak{A}}_s=(\overline{A}, \Omega^{(s)})$. Следовательно, множество $C\subseteq\overline{A}$ совпадает с множеством $\bigcup_{s\in S}\Omega^{(s)}(\overline{A})$ и гомоморфизм $h: C\rightarrow\Omega(A)$ такой, что $(\forall a\in\Omega(A))\ (\forall\overline{a}\in C_a)\ h(\overline{a})=a$, удовлетворяет условию (1) для любой ошибки γ_s. Теорема доказана. Очевидно, для данной алгебры $\mathfrak{A}$ всегда существует устойчивая алгебра, представимая в виде прямого произведения $2d+1$ или большего числа алгебр, изоморфных $\mathfrak{A}$. Этот тривиальный случай соответствует тому, что каждое конгруэнтное разделение системы включает все пары $(a, b)\in A\times A\setminus\Delta_A$ (Δ_A — диагональ A).

Пример 1. Пусть задана симметрическая абелева группа $\mathfrak{A}$ из восьми элементов ($A=\{1, \ldots, 8\}$) (табл. 1). Следующие покрытия конгруэнтны для $\mathfrak{A}$:

$$\rho(\xi_1)=\{\overline{1,2};\ \overline{3,4};\ \overline{5,6};\ \overline{7,8}\};$$
$$\rho(\xi_2)=\{\overline{1,3};\ \overline{2,4};\ \overline{5,8};\ \overline{6,7}\};$$
$$\rho(\xi_3)=\{\overline{1,4};\ \overline{2,3};\ \overline{5,7};\ \overline{6,8}\};$$
$$\rho(\xi_4)=\{\overline{1,5};\ \overline{2,6};\ \overline{3,8};\ \overline{4,7}\};$$
$$\rho(\xi_5)=\{\overline{1,6};\ \overline{2,5};\ \overline{3,7};\ \overline{4,8}\};$$
$$\rho(\xi_6)=\{\overline{1,7};\ \overline{2,8};\ \overline{3,6};\ \overline{4,5}\}.$$

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	4	3	6	5	8	7
3	3	4	1	2	8	7	6	5
4	4	3	2	1	7	8	5	6
5	5	6	8	7	1	2	4	3
6	6	5	7	8	2	1	3	4
7	7	8	6	5	4	3	1	2
8	8	7	5	6	3	4	2	1

Легко проверить, что система конгруэтных разделений $\rho(\xi_1), \ldots, \rho(\xi_6)$ 5-полна. Следовательно, по группе $\mathfrak{A}$ можно построить $2_{\mathfrak{A}}$-устойчивую алгебру $\overline{\mathfrak{A}}=\prod_{i=1}^{6}\mathfrak{A}/\rho(\xi_i)$ (нумерация блоков покрытий $\rho(\xi_i)$ осуществляется в том порядке, в котором они выписаны выше).

Действительно, пусть $\rho(\xi_i)=\{a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4\}$ $(i=1, \ldots, 6)$. Тогда:

$$N_1=\{(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1, a_6^1)\};$$
$$N_2=\{(a_1^1, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2, a_6^2)\};$$
$$N_3=\{(a_1^2, a_2^1, a_3^2, a_4^3, a_5^3, a_6^3)\};$$
$$N_4=\{(a_1^2, a_2^2, a_3^1, a_4^4, a_5^4, a_6^4)\};$$
$$N_5=\{(a_1^3, a_2^3, a_3^3, a_4^1, a_5^2, a_6^4)\};$$
$$N_6=\{(a_1^3, a_2^4, a_3^4, a_4^2, a_5^1, a_6^3)\};$$
$$N_7=\{(a_1^4, a_2^4, a_3^3, a_4^4, a_5^3, a_6^1)\};$$
$$N_8=\{(a_1^4, a_2^3, a_3^4, a_4^3, a_5^4, a_6^2)\}.$$

Построим теперь для каждого $k=1, \ldots, 8$ сферу Q_k — множество элементов из $\prod_{i=1}^{6}\rho(\xi_i)$, отличающихся от элемента из N_k не более чем в двух компонентах. (В Q_1, например, войдут $(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1, a_6^1)$, $(a_1^1, a_2^2, a_3^1, a_4^3, a_5^1, a_6^1)$, $(a_1^1, a_2^1, a_3^4, a_4^1, a_5^3, a_6^1)$ и т. д.) Сферы Q_k попарно не пересекаются, и их объединение с соответствующими покомпонентными операциями образует подалгебру в $\overline{\mathfrak{A}}$. Отображение $h:\bigcup_{k=1}^{8} Q_k\rightarrow A$ такое, что для любого $\overline{a}\in Q_k$ $h(\overline{a})=k$, определяет процесс коррекции ошибок в алгебре $\overline{\mathfrak{A}}$, поскольку изменение структуры любых двух компонентных алгебр прямого произведения может привести к изменению не более двух проекций результата группового умножения.

Если покрытия $\rho(\xi_i)$ в доказательстве теоремы 2 являются разбиениями, то условия теоремы 2 являются необходимыми условиями. При $d=0$ в этом случае из теоремы 2 следует условие подпрямой декомпозиции алгебр. В приложении к автоматам это дает известный метод параллельной декомпозиции заданного автомата [3]. В общем случае, однако, условия (4) не являются необходимыми. Для $d=0$ это показывает следующий пример.

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6
ω_1	1	4	1	2	6	5
ω_2	4	4	4	4	1	3
ω_3	1	2	1	4	2	1

Таблица 3

	$a\alpha$	$a\beta$	$a\gamma$	$b\alpha$	$b\beta$	$b\gamma$	$c\alpha$	$c\beta$	$c\gamma$
ω_1	$b\beta$	$b\alpha$	$b\beta$	$a\beta$	$a\alpha$	$a\beta$	$c\beta$	$c\alpha$	$c\beta$
ω_2	$b\gamma$	$b\alpha$	$b\alpha$	$b\gamma$	$b\alpha$	$b\alpha$	$a\gamma$	$a\alpha$	$a\alpha$
ω_3	$a\alpha$	$a\beta$	$a\alpha$	$b\alpha$	$b\beta$	$b\alpha$	$a\alpha$	$a\beta$	$a\alpha$
φ	1	2	3	4	1	4	6	5	—

Таблица 4

	1	2	3	4	5
ω_1	3	3	—	1	3
ω_2	2	4	2	2	4

Пример 2. Алгебра $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$; $A = \{1, \ldots, 6\}$; $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ задается табл. 2. (Алгебра может определять функционирование автомата с шестью состояниями и тремя входными сигналами.) Легко проверить, что симметричны замыкания ξ_1 и ξ_2 бинарных отношений $\zeta_1 = \{(1,5), (1,6), (2,4), (2,5)\ (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)\}$, $\xi_2 = \{(1,3), (2,3), (2,4), (2,6), (3,5), (3,6), (4,5)\ (5,6)\}$ являются конгруэнтными разделениями и соответствующие покрытия $\rho(\xi_1) = \{\overline{1,2,3}; \overline{1,4}, \overline{5,6}\} = \{a, b, c\}$ и $\rho(\xi_2) = \{\overline{1,4,6}; \overline{1,2,5}; \overline{3,4}\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ конгруэнтны. Построим фактор-алгебру

$\mathfrak{A}/\rho(\xi_1)$	a	b	c
ω_1	b	a	c
ω_2	b	b	a
ω_3	a	b	a

;

$\mathfrak{A}/\rho(\xi_2)$	α	β	γ
ω_1	β	α	β
ω_2	γ	α	α
ω_3	α	β	α

Алгебра $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\rho(\xi_1) \times \mathfrak{A}/\rho(\xi_2)$ с носителем $\rho(\xi_1) \times \rho(\xi_2)$ задается табл. 3.

Последняя строка этой таблицы задает гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}$ подалгебры $\mathfrak{D}$ алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Итак, хотя система конгруэнтных разделений ξ_1 и ξ_2 алгебры $\mathfrak{A}$ не является полной, алгебру $\mathfrak{A}$ может моделировать алгебра $\bar{\mathfrak{A}}$, представленная прямым произведением двух алгебр $\mathfrak{A}/\rho(\xi_1)$ и $\mathfrak{A}/\rho(\xi_2)$, мощности носителей которых меньше мощности носителя $\mathfrak{A}$.

Теорема 3. Пусть задана алгебра $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$, [illegible] и разбиение $\pi_\Omega = \{\Omega_j\}_{j \in I}$ множества Ω. Тогда слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивая алгебра $\bar{\mathfrak{A}}$, представимая в виде прямого произведения m алгебр, существует, если на $\mathfrak{A}$ существует $f(a, b)$ — полная система m конгруэнтных разделений, причем

$$f(a, b) = \begin{cases} 2d + 1, & \text{если существует } j \in I \text{ такое, что } (a, b) \in \Omega_j(A) \times \Omega_j(A) \\ 1 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \tag{5}$$

(Здесь, как и ранее, $\Omega_j(A)$ обозначает множество образов всех операций, входящих в Ω_j.)

Выбор π_Ω существенно влияет на мощность носителя слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры. При выборе этого разбиения могут быть использованы методы, предложенные [4].

Теорема 4. Для любого фиксированного d существует класс алгебр таких, что для любой алгебры $\mathfrak{A}$ из этого класса минимальная мощность носителя слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры (при соответствующем разбиении π_Ω) совпадает с мощностью носителя $\mathfrak{A}$.

Таким образом, слабая $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивость для любого d может не потребовать введения избыточности в носитель алгебры.

В заключение этого раздела отметим, что все полученные результаты полностью применимы для алгебр, операторы которых заданы не на всех возможных наборах своих аргументов. Такие алгебры, в частности, описывают функционирование частично-определенных ДУ.

Пример 3. Для алгебры $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$; $A = \{1, \ldots, 5\}$ с двумя унарными операциями ω_1, ω_2 (табл. 4) покрытия $\rho(\xi_1) = \{\bar{1}; \overline{2,5}; \bar{3}; \bar{4}\}$ и $\rho(\xi_2) = \{\bar{1}; \bar{2}; \overline{3,4}; \bar{5}\}$ конгруэнтны. (В табл. 4 чертой обозначено неопределенное значение операции $\omega_1(3)$.) Выберем $\pi_\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2\}$, $\Omega_j = \{\omega_j\}$. Из табл. 4 $\Omega_1(A) = \{1, 3\}$, $\Omega_2(A) = \{2, 4\}$. В системе разделений ξ_1, ξ_2, $\xi_3 = \xi_1$ пары (1, 3) и (2, 4) содержат все три разделения; все остальные пары из $A \times A \setminus \Delta_A$ входят по крайней мере в одно из разделений. Покажем, что $\bar{\mathfrak{A}} = \prod_{i=1}^{3} \mathfrak{A}/\rho(\xi_i)$ слабо $d_{\mathfrak{A}}$-устойчива относительно π_Ω. Положим $\rho(\xi_i) = \{a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4\}$. Тогда (см. доказательство теоремы 2):

$$N_1 = \{(a_1^1, a_2^1, a_3^1)\};\ N_2 = \{a_1^2, a_2^4, a_3^2)\}.\ N_3 = \{(a_1^3, a_2^3, a_3^3)\};\ N_5 = \{(a_1^2, a_2^4, a_3^2)\}.$$

$$N_4 = \{(a_1^4, a_2^3, a_3^4)\};\ N_5 = \{(a_1^2, a_2^4, a_3^2)\}.$$

[illegible] $i = 1, \ldots, 5$ построим сферу [illegible] элементов из $\overline{A}$ $\bigcup_{i=1}^{3} \rho(\xi_i)$, отлича- [illegible] N_k не более чем в одной [illegible]. Обозначим $C_1 = Q_1 \cup Q_3$, $C_2 = Q_2 \cup Q_4$. [illegible] $h_1 : C_1 \to \Omega_1(A)$ и $h_2 : C_2 \to \Omega_2(A)$ [illegible] соотношениями:

$$h_1(\overline{a}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a} \in Q_1, \\ 3, & \text{если } \overline{a} \in Q_3; \end{cases}$$

$$h_2(\overline{a}) = \begin{cases} 2, & \text{если } \overline{a} \in Q_2, \\ 4, & \text{если } \overline{a} \in Q_4 \end{cases}$$

[illegible] (табл. 2) [illegible] функцию переходов [illegible]-определенного автомата с пятью со- [illegible] двумя входными сигналами, то [illegible] одиночной ошибки, если ис- [illegible] двоичные элементы памяти (ЭП), [illegible] ЭП, [illegible]

[illegible] 2 II.

[illegible] СИНТЕЗА $d_{\mathfrak{A}}$-УСТОЙЧИВЫХ ДУ

[illegible] вопросы построения носи- [illegible] про- [illegible] конгруэнтных раз- [illegible]

[illegible] (конгруэнтному) по- [illegible] алгебры $\mathfrak{A}$ соответствует (см. определение 6) единственное (конгруэнтное) раз- [illegible] же разделе- [illegible] различные покрытия [illegible] ξ конгруэнтно, то не все соответствующие [illegible] конгруэнтными для дан- [illegible] фактор-алгебр $\mathfrak{A}/\rho(\xi)$ [illegible] следова- [illegible] уменьшить [illegible] [illegible], целесообразно для данного конгруэнтного разделения ξ выбирать [illegible] конгруэнтное покрытие $\rho(\xi)$ с [illegible]. С этой целью предла- [illegible] использовать конструкцию описываемого [illegible]-транзитивного покрытия.

[illegible]. Максимально транзитивным [illegible] множества A, соответствующим раз- [illegible] ξ множества A (обозначается $\rho_{MT}(\xi)$), [illegible] покрытие $\{A_i\}_{i \in I}$ множества A, удовлет- [illegible] условиям:

1) [illegible] $A_i \subseteq A_j \to i = j$;

2) $(\forall (a, b) \in A \times A)\ (a, b) \notin \xi \longleftrightarrow (\exists i \in I) : (a, b) \in$ [illegible]

3) $(\forall A' \subseteq A)\ (A' \times A') \cap \xi = \varnothing \to (\exists i \in I) : A' \subseteq A_i$.

Лемма 1. Если ξ — конгруэнтное разделение алгебры $\mathfrak{A}$, то $\rho_{MT}(\xi)$ — конгруэнтное покрытие $\mathfrak{A}$.

Следует отметить, что $\rho_{MT}(\xi)$ единственным образом определяется по ξ последовательным разделением множества на максимальные подмножества, не содержащие в одном блоке элементы a и b, если $(a, b) \in \xi$. Везде далее будем полагать $\rho(\xi) = \rho_{MT}(\xi)$.

Множество всех конгруэнтных разделений $\mathfrak{A}$ относительно операций теоретико-множественного пересечения и объединения образуют структуру $L_{\mathfrak{A}}$ — подструктуру структуры всех симметричных нерефлексивных бинарных отношений на носителе $\mathfrak{A}$ [1]. Таким образом, задача синтеза (слабо) $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры сводится к выбору на структуре $L_{\mathfrak{A}}$ $f(a, b)$-полной системы конгруэнтных разделений, причем $f(a, b)$ определяется условиями теоремы 2 (или 3).

Множество $\overset{*}{L}_{\mathfrak{A}}$ образующих структуры $L_{\mathfrak{A}}$ состоит из всех конгруэнтных разделений ξ_{ab}, каждое из которых является объединением всех элементов из $L_{\mathfrak{A}}$, не содержащих пару (a, b). Для алгебры с k унарными операциями ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$) образующие строятся следующим образом. Пусть $\tau \subseteq A \times A$. Обозначим: $\Omega(\tau) = \bigcup_{i=1}^{k} \{(\omega_i(a), \omega_i(b)) \mid (a, b) \in \tau\}$. Пусть $\Omega^0(\tau) = \tau$ и $\Omega^i(\tau) = \Omega(\Omega^{i-1}(\tau))$ для $i \geqslant 1$. Тогда дополнение к симметричному рефлексивному замыканию бинарного отношения ξ_{ab} $\bigcup_{i=0}^{t} \Omega^i(\{(a, b)\})$, где $t = C^2_{|A|}$, даст искомое конгруэнтное разделение ξ_{ab}. При этом любой элемент из $L_{\mathfrak{A}}$ может быть пересечением некоторых элементов из $\overset{*}{L}_{\mathfrak{A}}$.

По заданной алгебре $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ построим матрицу конгруэнтных разделений, т. е. матрицу из нулей и единиц, столбцы которой помечены всеми неупорядоченными парами $\{a, b\}$ ($a \neq b$) элементов из A, а строки — элементами из $L_{\mathfrak{A}}$. На пересечении столбца $\{a, b\}$ и строки $\xi \in L_{\mathfrak{A}}$ ставится единица, если $(a, b) \in \xi$, и ноль — в противном случае. Задача отыскания $f(a, b)$-полной системы конгруэнтных разделений (а следовательно, и синтеза) слабо ($d_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры) сводится к отысканию такого набора строк таблицы разделений, чтобы образованная этими строками матрица содержала в столбце $\{a, b\}$ не менее $f(a, b)$ единиц. Таким образом, эта задача является обобщением известной задачи отыскания минимального покрытия; будем называть ее задачей отыскания минимального f-покрытия.

Пусть $\xi \in L_{\mathfrak{A}}$ и ξ включает пару (a, b). Тогда существует $\xi^* \in L^*_{\mathfrak{A}}$, которое также включает (a, b). Следовательно, таблицу конгруэнтных разделений для решения задачи поиска минимального f-покрытия можно строить только из строк, соответствующих элементам из $L^*_{\mathfrak{A}}$. На практике обычно ставится задача синтеза ДУ с требуемыми надежностными свойствами из минимального количества модулей с заданными ограничениями на их сложность. За меру сложности модуля примем мощность носителя соответствующей алгебры. Пусть q — верхняя граница сложности компонентного модуля. Если $|A|$ — мощность носителя соответствующей алгебры, то при $q \geqslant |A|$ решение задачи построения (слабо) $d_{\mathfrak{A}}$-устойчивого ДУ сводится просто к $2d + 1$-кратному дублированию исходного ДУ. Если $q < A$, то требуется построить нетривиальную декомпозицию ДУ с заданными надежностными свойствами из минимального числа компонентных подустройств, т. е. решить задачу поиска минимального f-покрытия для таблицы разделений, строки которой соответствуют всем конгруэнтным разделениям $\xi \in L_{\mathfrak{A}}$ таким, что $|\rho_{M\tau}(\xi)| \leqslant q$.

Пусть $L_{\mathfrak{A}}(q)$ — множество всех таких разделений. Тогда для упрощения задачи следует в таблицу конгруэнтных разделений включать строки, соответствующие только максимальным элементам из $L_{\mathfrak{A}}(q)$, которые легко получаются из множества $\dot{L}_{\mathfrak{A}}$ образующих структуры $L_{\mathfrak{A}}$.

Пример 4. Для алгебры $\mathfrak{A}$ из примера 3 множество всех максимальных элементов $L_{\mathfrak{A}}(4)$ состоит из трех разделений: ξ_{13}, ξ_{25}, ξ_{34}. Соответствующая таблица конгруэнтных разделений (табл. 5) содержит дополнительные строки, указывающие для каждой пары значение функции $f_1(a, b)$ для построения слабо $1_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры относительно разбиения $\pi_\Omega = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$ и значение $f_2(a, b)$ — для построения $1_{\mathfrak{A}}$-устойчивой алгебры. Из таблицы видно, что минимальное f_1-покрытие дает множество $\{\xi_{25}, \xi_{25}, \xi_{34}\}$, а минимально f_2-покрытие — множество $\{\xi_{25}, \xi_{25}, \xi_{25}, \xi_{34}\}$.

Таблица 5

	1,2	1,3	1,4	1,5	2,3	1,4	2,5	3,4	3,5	4,5
ξ_{13}	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
ξ_{25}	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
ξ_{34}	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
f_1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	1
f_2	3	3	3	1	3	3	1	3	1	1

В заключение этого раздела отметим, что рассмотрение f-полной системы конгруэнтных разделений алгебры $\mathfrak{A}$ позволяет решать обобщенную задачу надежностного синтеза ДУ, поскольку требования надежности простым и естественным способом выражаются с помощью функции f. Например, если в ДУ необходимо исправить ошибки d компонент, то следует положить $f(a, b) = 2d + 1$ для всех $(a, b) \in \Omega(A) \times \Omega(A)$; если требуется обнаруживать ошибки произвольных d компонент, то нужно положить $f(a, b) = d + 1$; если для любых $a, b \in \Omega(A)$ задана цена C_{ab} ошибочной выдачи устройством сигнала a вместо сигнала b, то $f(a, b)$ следует считать пропорциональной C_{ab}, и т. д.

СВЯЗЬ МЕЖДУ f-ПОЛНЫМИ СИСТЕМАМИ РАЗДЕЛЕНИЙ И КОРРЕКТИРУЮЩИМИ КОДАМИ

Определение 9. Пусть задано множество K всех возможных векторов $K = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$, где $\varkappa_i \in \{0, 1, \ldots, p_i - 1\}$. Подмножество $M \subseteq 2^K$ множества всех подмножеств K будем называть обобщенным m-разрядным кодом с комбинированным использованием импульсных признаков (обобщенным КИИП-кодом) [5].

Расстоянием $r(\varkappa, \eta)$ между векторами $\varkappa, \eta \in K$ будем считать число несовпадающих компонент в $\varkappa$ и η, а расстоянием $r(P, T)$ между множествами P и T $(P, T \subseteq K)$ — минимальное расстояние между парами векторов $\varkappa$ и η для всех $\varkappa \in P$, $\eta \in T$.

Определение 10. Расстоянием обобщенного КИИП-кода M будем называть минимальное расстояние между различными множествами, входящими в M. В [5], [6] показана целесообразность использования КИИП-кодов в системах телемеханики и для коррекции ошибок в ДУ. Однако методы построения КИИП-кодов связаны с весьма существенными трудностями. Приводимая ниже теорема указывает связь f-полной системы разделений и обобщенных КИИП-кодов и дает метод построения широкого класса КИИП-кодов.

Теорема 5. Пусть задана f-полная система разделений $\xi_1, \ldots, \xi_m$ множества A. Тогда существует обобщенный КИИП-код с расстоянием $\min\limits_{a, b \in A} f(a, b)$, для которого p_i есть мощность покрытия $\rho(\xi_i)$ соответствующего ξ_i.

В частности, любая (слабо) $d_{\mathfrak{B}}$-устойчивая алгебра, построенная описанными методами, порождает некоторый обобщенный КИИП-код (см. примеры 2 и 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Кон. Универсальная алгебра, изд-во «Мир», 1968.
2. ... Карповский. Конечные автоматы с исправлением и обнаружением ошибок, сб. «Вычислительная техника и вопросы кибернетики». Изд-во ЛГУ, вып. 5, Л., 1968.
3. J. Hartmanis, R. E. Stearns. Algebraic Structure Theory of Sequential Machines, Prentice-Hall Inc, New York, 1966.
4. Ю. Г. Карпов, М. Г. Карповский. Об оптимальных методах введения кодовой избыточности для коррекции ошибок в конечных автоматах, журн. «Кибернетика», № 1, К., 1971.
5. Г. М. Тененгольц. Системы кодирования с комбинированным использованием импульсных признаков, сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», изд-во «Наука», М., 1966.
6. В. З. Кришталь, В. М. Остиану. Повышение надежности релейных устройств из функциональных элементов», Труды III конференции по теории передачи и кодирования информации. Секция III, М., 1967.

Поступила в редакцию 24.VI 1971