1967 1

Кибернетика

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

М. Г. КАРПОВСКИЙ, Н. С. ЩЕРБАКОВ

АВТОМАТЫ С САМОКОРРЕКЦИЕЙ ПО ПЕРЕХОДАМ

УДК 51:621.391

В настоящее время разработан ряд методов коррекции ошибок в автоматах, основанных на использовании корректирующих кодов [1] — [3]. Разработанные методы являются универсальными, однако их реализация, как правило, требует достаточно высокой избыточности. Вследствие этого возникает задача разработки методов коррекции, эффективных для отдельных классов автоматов. При этом учет необходимости коррекции ошибок следует производить уже на этапе абстрактного синтеза автомата и способ введения коррекции должен существенно учитывать конкретные особенности алгоритма функционирования автомата. Это в общем случае дает возможность снизить требуемую избыточность.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан автомат Мура с входным алфавитом $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_x}\}$, алфавитом состояний $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_a}\}$ и функцией переходов $X \times A \xrightarrow{\varphi} A$. Будем считать элементы входного алфавита X неподверженными влиянию ошибок. Формальная постановка при этом предположении задачи о коррекции ошибок, понятий l-кратной ошибки и автомата с коррекцией (обнаружением или исправлением) l-кратной ошибки приведены на языке теории автоматов в [4]. В дальнейшем понятия l-кратной ошибки в автомате, правильное и ошибочное состояние автомата с коррекцией l-кратной ошибки будем использовать в смысле [4].

Под переходом под действием входного сигнала $x(t) \in X$ в момент t в автомате, для которого $A = \{0, 1\}^n$, будем понимать

$$a'(t) = \varphi[x(t), a(t-1)] \oplus a(t-1), \quad (1)$$

(mod 2).

Основная идея предлагаемого метода коррекции состоит в отыскании такого кодирования состояний автомата, при котором множество переходов под действием одного и того же входного сигнала x_i образовывало бы код V_i с заданной корректирующей способностью.

В качестве системы $\{V_i\}$ используются коды, кодовые слова которых имеют постоянный вес.

При этом факт наличия ошибки устанавливается путем анализа входного сигнала и веса перехода под действием этого входного сигнала. Декодирующая схема содержит не более n дифференцирующих цепочек или сумматоров по mod 2 и не более n n-входовых пороговых элементов.

КОДИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ АВТОМАТА

Рассмотрим подробно метод кодирования состояний, при котором переходы под действием одного и того же входного сигнала имеют одинаковый вес. Вес перехода (число единиц в векторе перехода) под действием входного сигнала $x_k (k = 1, 2, \ldots, n_x)$ будем обозначать $|x_k|$. Граф переходов автомата без учета направлений стрелок будем обозначать $G(M)$. Приведем условия, из которых могут быть определены $|x_k|$. Нижняя граница для $|x_k|$ при $A = \{0,1\}^n$ устанавливается соотношением

$$C_n^{|x_k|} \geqslant M_j \; (j = 1, 2, \ldots, n_a), \quad (2)$$

где M_j — число состояний a_s таких, что $\varphi(x_k, a_s) = a_j$.

Пусть, далее, r_{ik} — число вхождений дуг, помеченных x_k в i-ом цикле графа переходов $G(M)$. Тогда для любого i

$$\sum_{k=1}^{n_x} r_{ik} \cdot |x_k| = 2R, \quad (3)$$

где R — некоторое натуральное число.

Условие (2) достаточно проверить лишь для линейно независимых циклов графа переходов $G(M)$, число которых определяется цикломатическим числом γ графа $G(M)$

$$\gamma = n_a(n_x - 1) + 1. \quad (4)$$

Из (3) имеем:

1. Если существует $a \in A$ такое, что $\varphi(x_k, a) = a$, то

$$|x_k| = 0. \quad (5)$$

2. Если существуют $a_i, a_j \in A$ такие, что $\varphi(x_k, a_i) = a_j$ и $\varphi(x_s, a_j) = a_i$, то

$$|x_k| = |x_s|. \quad (6)$$

3. Если $A = \{0, 1\}^n$ и существуют $a_i, a_j \in A$ такие, что $\varphi(x_k, a_i) = \varphi(x_k, a_j)$ или $a_j = \varphi[x_k,$

$\varphi(x_k, a_i)]$, $a_i = \varphi(x_s, a_j)$ или $a_j = \varphi(x_s, a_i)$ и $|x_k| \equiv \pm P \pmod n$, где $P \leqslant \left]\frac{n}{2}\right[$, $\left(\left]\frac{n}{2}\right[\right.$ — ближайшее не меньшее $\frac{n}{2}$ целое число$\Big)$, то $|x_s| \in \{2, 4, \ldots, 2p\}$.

4. Если $A = \{0, 1\}^n$ и на графе переходов существует цикл длины не меньше 2^{n-1}, то хотя бы один из входных сигналов, которыми помечены дуги, входящие в цикл, должен иметь нечетный вес.

Пример. Пусть автомат задается таблицей переходов. Положим $A = \{0, 1\}^2$. Рассмотрим цикл (a_1, a_2, a_3, a_4), дуги этого цикла помечены x_1, следовательно, $|x_1| = 1$. Далее, $\varphi[x_1, \varphi(x_1, a_1)] = \varphi(x_2, a_1)$ и, следовательно, $|x_2| = 2$.

Таблица

	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	a_2	a_4	a_1	a_3
x_2	a_4	a_3	a_2	a_1

Предположим теперь, что веса входных сигналов, удовлетворяющие рассмотренным выше условиям, зафиксированы. (При этом различным входным сигналам могут соответствовать одинаковые веса переходов. В том случае, если веса всех входных сигналов положить равными единице, рассматриваемая задача сводится к известной задаче вложения графа переходов в n-й куб, которая возникает при противогоночном кодировании состояний асинхронных автоматов [5].)

Рассмотрим теперь вопрос об отыскании кодирования состояний автомата, обнаруживающего ошибки описанным выше способом. Каждое кодирование может быть задано матрицей с элементами a_{ij} $(a_{ij} \in \{0, 1\})$, i-я строка которой является кодовым набором i-го состояния a_i. Так как корректирующие свойства кода инвариантны к перестановкам столбцов матрицы $\|a_{ij}\|$, то кодирование будем задавать характеристическим вектором вхождения столбцов $\overline{C} = (c_1, \ldots, c_{2^{n_a}-1})$, где n_a — число состояний автомата, подобно тому, как это делалось в [6]. Здесь c_i — число вхождений столбца, который при чтении сверху вниз является двоичным разложением числа i. Задачу отыскания кодирования будем рассматривать как задачу отыскания характеристического вектора $\overline{C}$. Если в синтезируемом автомате не предусматривается дублирование элементов памяти, то $c_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^{n_a} - 1)$. Далее корректирующие свойства кода не зависят от того, какое состояние будет закодировано кодом $00\ldots0$. Поэтому положим $a_1 = (\underbrace{00\ldots0}_{n})$. При этом, если одному из входных сигналов, например x_k, приписан вес n, то $a_\beta = \varphi(x_k, a_1) = (\underbrace{11\ldots1}_{n})$. Тогда $c_i = 0$, если $i_1 = 1$ или $i_\beta = 0$, где $i = \sum_{s=1}^{n_a} i_s \cdot 2^{n_a - s}$.

Кроме того, если $n_a = 2^n$, то $c_i = 0$ при $\sum_{s=1}^{n_a} i_s \neq \frac{n_a}{2}$. Таким образом, число ненулевых компонент $\overline{C}$ не превышает $C_{n_a-2}^{\frac{n_a}{2}-1}$. Обозначим

$$h_i(q, p) = i_q \oplus i_p;\ \left(i = \sum_{s=1}^{n_a} i_s \cdot 2^{n_a - s}\right). \tag{7}$$

Тогда

$$\sum_{i \in I} c_i \cdot h_i(q, p) = |a_q \oplus a_p|, \tag{8}$$

здесь $|a_q \oplus a_p|$ — вес (число единиц) вектора $a_q \oplus a_p$; множество I образует все n_a-разрядные двоичные числа i, для которых $i_1 = 0$, $i_\beta = 1$, $\sum_{s=1}^{n_a} i_s = \frac{n_a}{2}$.

Построим теперь на основе соотношения (8) систему линейных уравнений

$$\sum_{i \in I} c_i \cdot h_i(q, p) - |x_k| = 0, \tag{9}$$

где $q, p = 1, 2, \ldots, n_a$, $k = 1, 2, \ldots, n_x$. Число уравнений системы (9) равно числу переходов автомата (для полностью определенного автомата $n_a \cdot n_x$, где n_x — число входных сигналов).

Неизвестные c_i $(i \in I)$ принимают значения 0 или 1. Решение системы (9), минимизирующее $n_s = \sum_{i \in I} c_i$, определяет характеристический вектор $\overline{C}$, для которого соответствующее кодирование обеспечивает заданные веса переходов и минимизирует объем памяти. В том случае, если веса входных сигналов $|x_k|$ неизвестны, система линейных уравнений, аналогичная (9), может быть составлена непосредственно по таблице переходов

При этом

$$\sum_{i \in I} c_i [h_i(q, p) - h_i(r, s)] = 0 \qquad (10)$$

для всех q, p, r, s, для которых существует x_k, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} a_q = \varphi(x_k, a_p), \\ a_r = \varphi(x_k, a_s). \end{cases} \qquad (11)$$

Задача минимизации объема памяти $n = \sum_{i \in I} c_i$ при линейных ограничениях (9) или (10) может быть решена обычными методами булева программирования.

Пример. Найдем кодирование состояний для коррекции ошибок в автомате заданной таблицей переходов. Для этого автомата, как было показано ранее, $|x_1| = 1, |x_2| = 2$. Положим $n = 2$, $a_1 = (00)$ и так как $\varphi(x_2, a_1) = a_4$, то $a_4 = a_8(11)$. Тогда $I = \{3, 5\}$ и, следовательно, $c_1 = c_2 = c_4 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$

$$c_3 \cdot h_3(1, 2) + c_5 \cdot h_5(1, 2) = 1;$$

$$c_3 \cdot h_3(2, 4) + c_5 \cdot h_5(2, 4) = 1;$$

$$c_3 \cdot h_3(3, 1) + c_5 \cdot h_5(3, 1) = 1;$$

$$c_3 \cdot h_3(4, 3) + c_5 \cdot h_5(4, 3) = 1;$$

$$c_3 \cdot h_3(1, 4) + c_5 \cdot h_5(1, 4) = 2;$$

$$c_3 \cdot h_3(2, 3) + c_5 \cdot h_3(2, 3) = 2;$$

$$c_3 \cdot h_3(3, 2) + c_5 \cdot h_5(3, 2) = 2;$$

$$c_3 \cdot h_3(4, 1) + c_5 \cdot h_3(4, 1) = 2.$$

Отсюда имеем $c_3 = c_5 = 1$ и $a_1 = (00)$, $a_2 = (01)$, $a_3 = (10)$, $a_4 = (11)$. Отметим, что в данном случае коррекция ошибок не потребовала увеличения объема памяти.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЛОЖЕННЫХ АВТОМАТОВ

Описанный выше метод обнаружения ошибок в автомате позволяет обнаружить 75% всех возможных ошибок, все ошибки нечетной кратности, а также половину ошибок четной кратности, а именно, те ошибки четной кратности, которые изменяют вес перехода в автомате. При этом для любого числа состояний и входных сигналов существует класс автоматов, для которых описанный выше метод обнаружения ошибок не требует избыточности в памяти автомата.

Рассмотрим теперь вопрос о реализации декодирующей схемы, которая определяет избыточность комбинационной части автомата. Процесс декодирования состоит из трех этапов:

1) вычисление вектора перехода a', 2) вычисление веса вектора перехода, 3) сопоставление веса вектора перехода и входного сигнала.

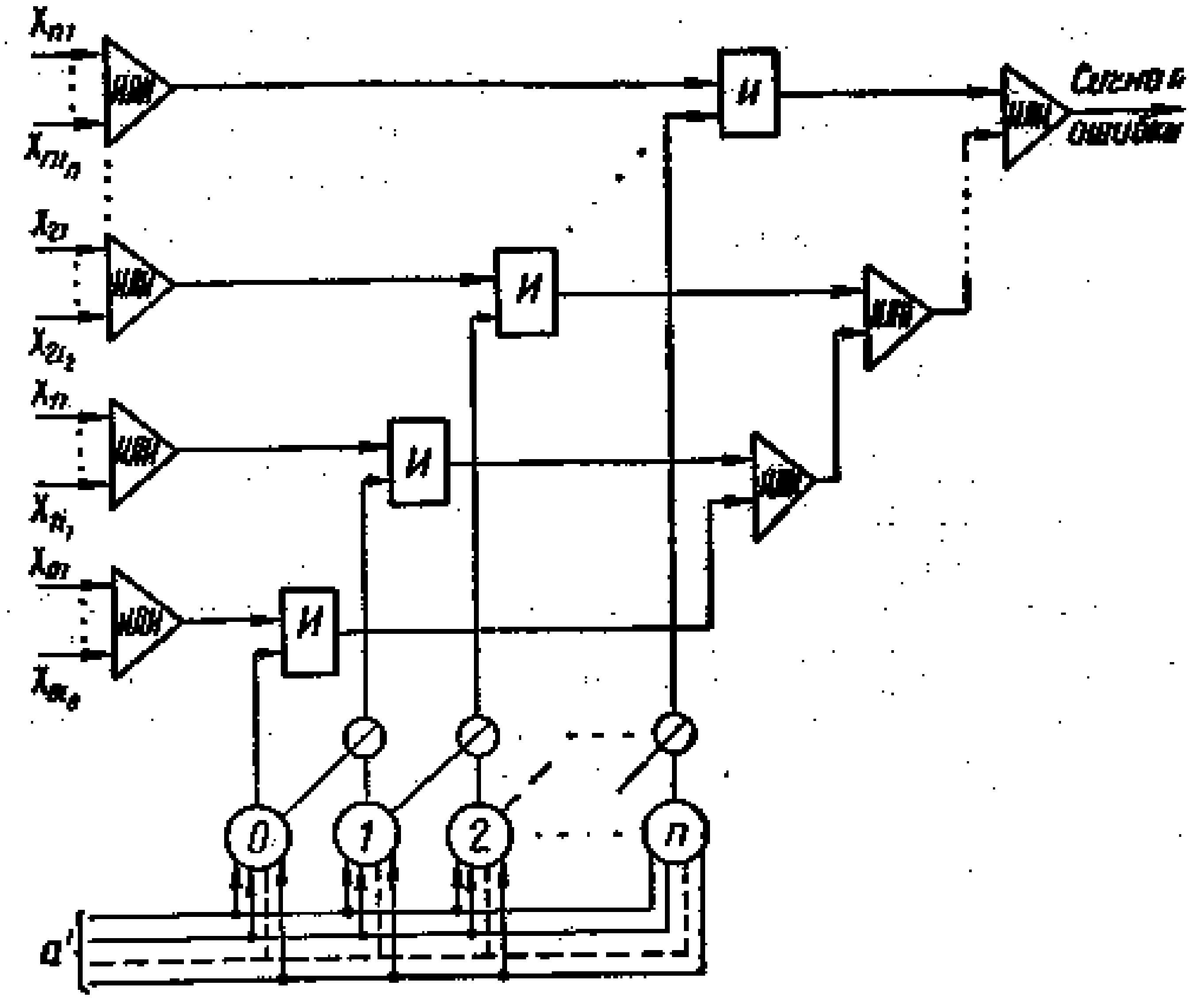

Рис. 1

Вычисление вектора перехода требует n дифференцирующих цепей на выходе элементов памяти или n сумматоров по модулю 2 (см. рис. 1). Вычисление веса вектора переходов может быть осуществлено с помощью не более чем n двухвходовых схем запрета и $n + 1$ n-входовых пороговых элементов с весами входов, равными 1, и с порогами 0, 1, . . . , n или с помощью симметричного базового многополюсника. Обозначим $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{l_{kl_k}}$ входные сигналы, имеющие вес k. Число различных значений k обозначим через N_k ($1 \leqslant N_k \leqslant n$). Тогда блок, осуществляющий сопоставление веса перехода и входного сигнала, может быть реализован с помощью не более чем $n_x + N_k - 1$ двухвходовых элементов И, ИЛИ. Функциональная схема декодирующего блока приведена на рис. 1.

При использовании описанного выше метода обнаружения ошибок переходы в автомате кодируются системами кодов, слова которых имеют постоянный вес. В том случае, если требуется обеспечить исправление ошибок в автомате кратности не выше l для кодирования переходов, следует использовать системы кодов с кодовым расстоянием $2l + 1$.

В качестве такой системы кодов целесообразно использовать систему смежных классов по групповому коду с заданным кодовым расстоянием. При этом, как и ранее, для любого числа состояний и входных сигналов и для любой кратности исправляемых ошибок существует класс автоматов, для которых исправление ошибок данной кратности не требует увеличения объема памяти автомата.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Гаврилов, Структурная избыточность и надежность релейных устройств, Труды I конгресса ИФАК, т. 3, Изд-во АН СССР, М., 1961.
2. В. З. Кришталь, В. М. Остиану, Синтез релейных устройств, нечувствительных к повреждениям элементов и искажениям входных воздействий, сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», изд-во «Наука», М., 1966.
3. М. Г. Карповский, В. И. Ружанский, Н. С. Щербаков, Использование корректирующих кодов для обнаружения и исправления ошибок в конечных автоматах, Труды III конференции по теории передачи и кодирования информации, М., 1967.
4. М. Г. Карповский, Конечные автоматы с обнаружением и исправлением ошибки, сб. «Вычислительная техника и вопросы кибернетики», изд. ЛГУ, вып. 5, Л., 1968.
5. Ю. Л. Томфельд, Устранение состязаний преобразованием графа переходов, сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», изд-во «Наука», М., 1966.
6. М. Е. Тылкин, О реализуемости матриц состояний в единичных кубах, сб. «Проблемы кибернетики», № 7, М., 1962.

Поступила в редакцию 27.V 1970