7

КОРРЕКЦИЯ ОШИБОК В АРИФМЕТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ, ВЫПОЛНЕННЫХ НА ЭЛЕМЕНТАХ СО МНОГИМИ УСТОЙЧИВЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

И. Л. Ерош, М. Г. Карповский
(г. Ленинград)

I. В ряде дискретных устройств и, в частности, в быстродействующих вычислительных машинах в последнее время широкое распространение получили элементы со многими устойчивыми состояниями. На таких элементах построен ряд специализированных вычислительных машин и показано, что такие машины по большинству основных параметров – экономичности, надежности, габаритам и даже быстродействию – превосходят машины, выполненные на двоичных элементах.

В настоящем докладе рассмотрены классы недвоичных кодов, предназначенные для коррекции ошибок в устройствах, выполняющих арифметические операции.

II. Работа арифметического устройства, состоящего из одинаковых элементов с q устойчивыми состояниями может описываться q-ичной позиционной системой счисления.

Любое положительное число N_1 в q-ичной системе счисления ($q \geq 2$) может быть представлено в виде

$$N_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot q^i, \qquad (1)$$

где $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$, n – количество разрядов, требующихся для записи числа.

[illegible] $e = N_1 - N_2$ [illegible] (2)

где $h \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm q-1\}$ будем называть глубиной ошибки в i-ом разряде арифметического устройства.

Если h_i принимают только положительные или только отрицательные значения, то для таких устройств целесообразно использовать арифметические коды, корректирующие несимметричные ошибки (коды для несимметричного арифметического канала).

По аналогии с двоичным случаем приведем определения веса и кратности ошибок для недвоичных арифметических каналов.

1. Весом числа N в q-ичной системе счисления будем называть минимальное число ненулевых слагаемых в представлении N в виде

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot q^i, \qquad (3)$$

где $a_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (q-1)\}$ – для симметричного арифметического канала;

$a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ для несимметричного арифметического канала.

Так определенный вес числа N будем обозначать

$d_q = \|N\|_q$ – для симметричного канала (САК);

$d_{нq} = |N|_q$ – для несимметричного канала (НАК).

2. Кратность произошедшей ошибки определены как

$$t = \|N_2 - N_1\|_q \quad \text{или} \quad t_н = |N_2 - N_1|_q .$$

Аналогично случаю двоичных кодов может быть определено расстояние между кодовыми словами недвоичных кодов, мощность кода и т. п.

III. Условия существования недвоичных арифметических кодов с обнаружением и исправлением независимых ошибок могут быть сформулированы следующим образом:

1. Для того, чтобы число А порождало код с обнаружением t кратных ошибок в арифметическом устройстве, выполненном на q-ичных элементах при числе контролируемых разрядов n, необходимо и достаточно, чтобы ни при каких наборах h_i и z_i не выполнялось сравнение

$$\sum_{i=1}^{t} h_i q^{z_i} \equiv 0 \pmod{A} \tag{4}$$

где

$z_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Коэффициенты h_i определяются в соответствии с моделью канала.

2. Для того, чтобы число А порождало код с исправлением t-кратных ошибок в арифметическом устройстве, выполненном на q-ичных элементах при числе контролируемых разрядов n, необходимо и достаточно, чтобы ни при каких наборах $h_i^{(1)}$, $h_j^{(2)}$, P и S не выполнялось сравнение

$$\sum_{i=1}^{t} h_i^{(1)} q^{P_i} \equiv \sum_{j=1}^{t} h_j^{(2)} q^{S_j} \pmod{A} \tag{5}$$

где $h_i, h_j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(q-1)\}$;

$P, S \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Аналогично случаю двоичного арифметического кода можно показать, что если число А порождает код с исправлением t кратных симметричных ошибок, то это же число А порождает код с обнаружением ошибок кратности $2t$ в том же канале и наоборот. Для несимметричного канала это условие не выполняется.

Рассмотрим вопросы построения различных классов кодов в недвоичных каналах.

1. Обнаружение одиночных ошибок.

При $t = 1$ из (4) получаем

$$h_i q^{z_i} \equiv 0 \pmod{A}, \tag{6}$$

где $h_i \in \{1, 2, 3, \ldots, q-1\}$; $z_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Для того, чтобы не выполнялось сравнение (6), достаточно взять $A = q+1$.

2. Исправление одиночной ошибки.

При $t=1$ из (5) получаем

$$h_i \cdot q^{z_i} \equiv h_j q^{z_j} \pmod{A} \tag{7}$$

Для одиночных малых ошибок (h_i, $h_j = \pm 1$) выбор числа А может производиться аналогично случаю исправления ошибок в двоичных арифметических каналах [1]. В частности, если q является первообразным корнем по модулю А, то число А порождает код с исправлением одиночных малых ошибок в арифметическом устройстве с числом разрядов

$n = \dfrac{\varphi(A)}{2}$ (для САК), $n = \varphi(A)$ (для НАК),

где $\varphi(A)$ – функция Эйлера.

Для нахождения арифметических кодов с исправлением ошибок глубины $h_i > 1$ могут быть использованы следующие теоремы:

Теорема 1. Если A_1 порождает код длины $n_1 = \frac{\varphi(A)}{2}$ с исправлением малых одиночных ошибок в q-ичном симметричном арифметическом канале, а A_2 удовлетворяет условиям

$$q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, A_2), \qquad (8)$$

$$|h_{i\,max}| < \left[\frac{A_2}{2}\right], \qquad (9)$$

то $A = A_1 A_2$ порождает код длины $n = n_1$ с исправлением одиночных ошибок глубины $h_{i\,max} \le \left[\frac{A_2}{2}\right]$ в q-ичном симметричном арифметическом канале.

Теорема 2. Если A_1 порождает код длины $n_1 = \varphi(A)$ с исправлением одиночных несимметричных малых ошибок в q-ичном арифметическом канале, а A_2 удовлетворяет условиям

$$q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, A_2), \qquad (10)$$

$$|h_{i\,max}| < A_2, \qquad (11)$$

то $A = A_1 A_2$ порождает код длины $n = n_1$ с исправлением одиночных несимметричных ошибок глубины $h_{i\,max} \le A_2 - 1$ в q-ичном арифметическом канале.

В теореме 1 накладывалось жесткое ограничение на глубину ошибок, а именно $h_{i\,max} \le \frac{q-1}{2}$. Если возможная глубина ошибок превышает эту величину, коды могут быть найдены с помощью следующей теоремы.

Теорема 3. Если $A_1 = q - 1$; $A_2 = q + 1$; A_3 — порождает код длины n_1 с исправлением одиночных малых ошибок в q-ичном симметричном арифметическом канале, то число $A = A_1 A_2 A_3$ порождает код той же длины с исправлением одиночных

ошибок произвольной глубины в том же канале.

В табл. 1 приведены некоторые коды с исправлением ошибок разной глубины $|h_{i\,max}| = \pm 1$; $|h_{i\,max}| \le \pm 4$; $|h_{i\,max}| \le \pm 9$ в симметричном десятичном арифметическом канале.

Таблица 1

n	$\lvert h_{i\,max}\rvert = \pm 1$ A	$\lvert h_{i\,max}\rvert \le \pm 4$ A	$\lvert h_{i\,max}\rvert \le \pm 9$ A
3	7	63	693
8	17	153	1683
9	19	171	1881
11	23	207	2277

В ряде арифметических устройств, использующих десятичную систему счисления, отдельные узлы могут быть реализованы на двоичных элементах. Это оказывает существенное влияние на характер ошибок устройства. Так, глубина ошибок h в разрядах устройства может с большой вероятностью принимать значения, равные степени двойки. Если ограничить рассмотрение одиночными ошибками, то для таких устройств можно считать $h_i \in \{0, \pm 2^0, \pm 2^1, \pm 2^2, \pm 2^3\}$. Для обнаружения одиночных ошибок в таком двоично-десятичном арифметическом канале можно взять $A = 3$. Выбор кода для исправления одиночных ошибок в таких устройствах можно произвести с помощью следующей теоремы.

Теорема 4. Если 2 принадлежит показателю δ_2 по модулю A, 10 принадлежит показателю δ_{10} по модулю A, и выполняются условия $\delta_2 > 6\delta_{10}$ (для САК) и $\delta_2 > 3\delta_{10}$ (для НАК), то число A порождает код с исправлением одиночных ошибок произвольной глубины в двоично-десятичном арифметическом канале, причем длина кода $n = \frac{\delta_{10}}{2}$ (для САК) и $n = \delta_{10}$ (для НАК).

В табл. 2 приведены некоторые числа A с соответствующими показателями δ_2 и δ_{10} для выбора кодов, исправляющих одиночные ошибки в симметричных и несимметричных двоично-десятичных арифметических каналах.

Таблица 2

A	δ_2	δ_{10}
41	20	5
53	52	13
173	172	43
211	210	30
317	316	78
547	546	91

3. Обнаружение многократных независимых ошибок в q-ичном несимметричном арифметическом канале.

Для обнаружения t-кратных независимых ошибок в полностью несимметричном q-ичном арифметическом канале условие (4) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{t} h_i \cdot q^{z_i} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, A), \tag{12}$$

где h_i – глубина ошибки в разряде с номером z_i,

$$z_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}.$$

Приведем два класса арифметических кодов, обнаруживающих ошибки в полностью несимметричных каналах. Первый класс кодов задается теоремой 5 и предназначен для обнаружения t-кратных независимых ошибок произвольной глубины $h_{max} \leq q-1$. Второй класс кодов задается теоремой 6 и существенно учитывает статистические ограничения, накладываемые на глубину ошибок между двумя контрольными проверками.

Теорема 5. Число A вида

$$A = \frac{q^{t+1}-1}{q-1} \tag{13}$$

порождает коды с обнаружением t-кратных независимых ошибок произвольной глубины в q-ичном несимметричном арифметическом канале.

Характерной особенностью кодов, задаваемых теоремой 5, является то, что величина модуля A не зависит от длины кода n.

Теорема 6. Если

$$h_{max} \cdot t < \frac{d}{s}(q-1), \tag{14}$$

где d и S – натуральные числа, то число A вида

$$A = \frac{q^d-1}{S} \tag{15}$$

порождает код с обнаружением t-кратных независимых ошибок глубины, не превышающей h_{max}.

Примечание. Из теоремы 6 следует, что при различных глубинах ошибок в разрядах устройства можно взять число A в виде (15), если выполняется условие

$$\max\left(\sum_{i=0}^{n} h_i\right) < \frac{d}{s}(q-1), \tag{16}$$

где $\max\left(\sum_{i=0}^{n} h_i\right)$ – максимальная алгебраическая сумма глубин ошибок в ячейках арифметического устройства за цикл между двумя контрольными проверками.

4. Обнаружение и исправление пачек ошибок в q-ичных арифметических каналах.

Для обнаружения пачек ошибок длины b и максимальной глубины h_{max} в q-ичном арифметическом канале число A следует выбрать так, чтобы ни при каких наборах h_i и i не выполнялось сравнение

$$\sum_{s=0}^{b-1} h_{i+s} q^{i+s} \equiv 0 \pmod{A}, \qquad (17)$$

где $0 \le i \le n-b-1$; $h_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm h_{max}\}$

Можно показать, что число A вида

$$A = \frac{h_{max}}{q-1}(q^b - 1) + \gamma, \qquad (18)$$

где γ – наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее условию

$$(h_{max} + \gamma, q) = 1, \qquad (19)$$

порождают коды с обнаружением пачек ошибок длины b в q -ичных симметричных и несимметричных арифметических каналах.

Для исправления пачек ошибок длины b и глубины h_{max} в q-ичном арифметическом канале число A следует выбрать так, чтобы ни при каких наборах $h_i^{(1)}, h_j^{(2)}, i$ и S не выполнялось сравнение

$$\sum_{s=0}^{b-1} h_{i+s}^{(1)} \cdot q^{i+s} \equiv \sum_{s=0}^{b-1} h_{j+s}^{(2)} q^{j+s} \pmod{A}, \qquad (20)$$

где $0 \le i, j \le n-b-1$; $h_{i+s}^{(1)}, h_{j+s}^{(2)}$ – глубины двух различных ошибок в ячейках $i+s$ и $j+s$ соответственно.

Если искать число A в виде $A = p^\alpha$, где p – простое, нечетное, α – целое, причем $\alpha \ge 1$, то условие исправления пачек ошибок примет вид

$$ind\left(\sum_{s=0}^{b-1} h_{i+s}^{(1)} q^s\right) \equiv ind\left(\sum_{s=0}^{b-1} h_{j+s}^{(2)} q^s\right) \left(mod\, \frac{p^\alpha - p^{\alpha-1}}{\delta}, \right) \qquad (21)$$

задаваясь различными h_i и проверяя невыполнимость сравнения (21) для заданного b при $n < \delta$, найдем число A в виде $A = p^\alpha$, которое порождает код с исправлением заданных пачек ошибок.

Пример. Пусть задано $q = 10$, $h_{max} = 3$, $b = 2$, $n = 3$. Канал полностью несимметричный. Возьмем $A = 37$. Тогда $\varphi(37) = 36$, $\delta = 3$, $\frac{\varphi(37)}{3} = 12$. Возможные векторы ошибок имеют вид:

$$h_i + h_{i+1} \cdot q \in \{1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}.$$

Индексы по модулю 37 этих чисел не сравнимы между собой по модулю 12, следовательно, число $A = 37$ порождает код с исправлением пачек ошибок длины $b=2$ и глубины, не превышающей $h_{max} = 3$ в десятичном арифметическом канале, причем длина кода $n = 3$.

IУ. Некоторые оценки эффективности недвоичных кодов.

Для кодов с основанием q аналогично случаю двоичных кодов может быть определено число различных по конечному эффекту ошибок [1]. Однако, эта функция будет зависеть не только от длины кода и максимальной кратности исправляемых ошибок t, но также и от основания счисления q и максимальной глубины ошибок h_{max}. Обозначим функцию числа различных по конечному эффекту ошибок для q-ичных кодов через $F(n, t, q, h_{max})$.

Очевидно, что число A, порождающее код длины n с исправлением t-кратных независимых ошибок с максимальной глубиной h_{max}, должно удовлетворять условию

$$A \geq F(n,t,q,h_{max})+1, \qquad (22)$$

причем, если в (22) выполняется точное равенство, то A порождает плотноупакованный (совершенный) код. Степень плотности упаковки недвоичных кодов может определяться аналогично случаю двоичных кодов [1] по формуле

$$\eta = \frac{F(n,t,q,h_{max})+1}{A}. \qquad (23)$$

Для кодов с исправлением одиночных ошибок нетрудно получить значение числа различных ошибок при $t=1$.

$$F(n,1,q,h_{max}) = 2\cdot n\cdot h_{max} \text{ (для САК)}; \qquad (24)$$

$$F_H(n,1,q,h_{max}) = n\cdot h_{max} \text{ (для НАК)}. \qquad (25)$$

Оценим степень плотности упаковки кодов, задаваемых теоремами 1 и 2.

Коды, исправляющие одиночные малые ошибки, в том случае, когда q является первообразным корнем по модулю A, являются совершенными, так как для них $\eta = 1$.

Степень плотности упаковки для кодов, задаваемых теоремами 1 и 2, оценивается формулами

$$\eta = 1 - \frac{q}{A_1(q-1)} \quad \text{для теоремы 1};$$

$$\eta = \frac{1}{q+1} - \frac{1}{A_1(q+1)} + \frac{1}{A_1(q-1)(q+1)} \quad \text{для теоремы 2}.$$

Лучшие коды, задаваемые теоремой 1, не являются совершенными, однако при больших значениях A (при больших длинах n) степень плотности упаковки таких кодов весьма высока. Класс кодов, задаваемых теоремой 2, является неплотноупакованным. Так, например, при $q = 10$ и $A_1 = 23$ получаем

$$\eta = \frac{199}{2277} \approx 0{,}087.$$

Литература

1. И.Л.Ерош, С.Л.Ерош, Арифметические коды с коррекцией многократных ошибок. "Проблемы передачи информации", Изд-во АН СССР, т. 3, вып. 4, 1967.

2. И.М.Виноградов, Основы теории чисел, изд-во "Наука", М., 1965.