

$-2p^2 + p^3$, а схеме S_{II} соответствует $f'_{II}(\bar{x}, \bar{e}) = (x_1 \& x_2 \oplus e_1) \& (x_3 \& x_4 \oplus e_2) \oplus e_3$ и $h(S_{II}) = \frac{3}{2}p - \frac{7}{8}p^2 - \frac{2}{8}p^3$. При одинаковой сложности S_{II} более надежна.

Пример 2. Пусть $E_1 = \{u_1 \& u_2 \& u_3, p_1, 1\}$; $E_2 = \{u_1 \vee u_2 \vee u_3, p_1, 1\}$; $E_3 = \{\bar{u}, p_2, 1\}$; $f(\bar{x}) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ и $P(x_i) = 0.5$. Для схемы со структурной формулой $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ имеем $h(S_I) = p_1 + (1 - 2p_1)(\frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{4}p_2^2)$, а со структурной формулой

$(x_1 \& x_2 \& x_3)$ имеем $h(S_{II}) = p_1 + (1 - 2p_1)(\frac{5}{4}p_2 - \frac{1}{2}p_2^2)$. Первая реализация более надежна. Примеры 1 и 2 показывают, что при фиксированной сложности схемы с меньшей $v(S)$ во многих случаях будут надежнее.

Пример 3. $E_1 = \{u_1 \& u_2, p, 1\}$; $E_2 = \{u_1 \vee u_2, p, 1\}$; $E_3 = \{\bar{u}, p, 1\}$; $f(\bar{x}) = \bar{x}_1 \& x_2$; $P(x_i) = 0.5$. Структурной формуле $(x_1 \& x_2)$ соответствует $h(S_I) = 2p - 2\frac{1}{2}p^2 + p^3$, структурной формуле $(x_1 \vee x_2)$ соответствует $h(S_{II}) = 2p - 2p^2$, и, следовательно, первая реализация надежнее. Примеры 2 и 3 показывают, что во многих случаях целесообразно проводить опускание отрицаний по теореме де Моргана.

Пример 4. $E_1 = \{u_1 \& u_2, p_1, 1\}$; $E_2 = \{u_1 \& u_2 \& u_3, p_2, 1\}$; $E_3 = \{u_1 \vee u_2, p_1, 1\}$; $E_4 = \{u_1 \vee u_2 \vee u_3, p_2, 1\}$; $f(\bar{x}) = x_1 \& x_2 \vee x_2 \& x_3 \vee x_3 \& x_1$; $P(x_i) = \alpha$. Структурной формуле $(x_1 \vee x_2) \& (x_2 \vee x_3) \& (x_3 \vee x_1)$ соответствует $h(S_I) = p_2 + (1 - 2p_2)(p_1(3\alpha + 3\alpha^2 - 3\alpha^3) - p_1^2(6\alpha - 3\alpha^2) + p_1^3)$, а структурной формуле $(x_1 \& x_2 \vee x_2 \& x_3 \vee x_3 \& x_1)$ соответствует $h(S_{II}) = p_2 + (1 - 2p_2)(p_1(3 - 6\alpha^2 + 3\alpha^3) - p_1^2(3 - 3\alpha^2) + p_1^3)$. При $\alpha = 0.5$ имеем $h(S_I) = h(S_{II})$, при $\alpha = 0.5 + \epsilon$ имеем $h(S_I) - h(S_{II}) = (1 - 2p_2)(7\epsilon - 6\epsilon^3 - 6p_1\epsilon) > 0$, следовательно, $h(S_I) > h(S_{II})$; при $\alpha = 0.5 - \epsilon$ имеем $h(S_{II}) > h(S_I)$. Пример 4 показывает, что выбор оптимальной структуры схемы существенно зависит от распределения на входе $P(\bar{x})$.

Литература

1. Чирков М. К. О надежности логических переключательных схем. В сб. «Вычислительная техника и вопросы программирования», вып. 2, Изд. ЛГУ, Л., 1963.
2. Мерекин Ю. В. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации. В сб. «Вычислительные системы», вып. 5, Новосибирск, 1963.
3. Закревский А. Д. Метод синтеза функционально устойчивых автоматов. ДАН СССР, т. 129, № 4, 1959.
4. Агматонг Д. В. A general method of applying error correction to synchronous digital systems. BSTJ, XL, No 2, 1964.
5. Winograd S. and Cowan J. D. Reliable computation in the presence of noise, 1962.

6. М а л ю г и н В. Д. Надежность переключательных схем. «Автоматика и телемеханика», № 9, 1964.
7. А м а р е л С., Б р о з о в с к и й Д. А. Теоретическое исследование надежности рекурсивных триангулярных переключательных сетей. В сб. «Методы введения избыточности для вычислительных систем», изд. «Советское радио», М., 1966.
8. U r b a n o R. H. On the convergence and ultimate reliability of iterated neural nets. IEEE Tr., EC-13, No 3, 1964.
9. Д у п а н о в О. Е. О синтезе некоторых классов управляющих систем. В сб. «Проблемы кибернетики», вып. 10, 1963.
10. Н е й м а н Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. В сб. «Автоматы», ИЛ, М., 1956.

М. Г. Карновский

линейные КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ С ОБНАРУЖЕНИЕМ И ИСПРАВЛЕНИЕМ ОШИБОК

Под линейным конечным автоматом (КА) понимается КА, структурная схема которого содержит только сумматоры по модулю 2 и элементы задержки или триггеры. Для любого линейного КА функции переходов и выходов линейны, т. е. всегда могут быть представлены в виде

$$a(t+1) = a(t) \otimes T \oplus x(t+1) \otimes R; \quad (1)$$

$$y(t+1) = a(t+1) \otimes S, \quad (2)$$

где $a(t)$ — двоичный вектор длины k (k — число элементов памяти КА); $x(t)$ — двоичный вектор длины $\lceil \log_2 n_x \rceil$ ($\lceil \log_2 n_x \rceil$ — число двоичных входных каналов КА; n_x — число входов); $y(t)$ — двоичный вектор длины $\lceil \log_2 n_y \rceil$ ($\lceil \log_2 n_y \rceil$ — число двоичных выходных каналов КА; n_y — число выходов); T, R, S — двоичные матрицы размерами соответственно $k \times k, \lceil \log_2 n_x \rceil \times k, k \times \lceil \log_2 n_y \rceil$.

Операции умножения \otimes и сложения \oplus над матрицами и векторами понимаются над $GF(2)$.

Линейные ДУ представляют собой весьма важный и широко распространенный класс КА. Целесообразность специального изучения методов коррекции ошибок в линейных КА вытекает из того, что при использовании для коррекции ошибок наиболее распространенных линейных кодов, для которых функции кодирования и выработки синдрома линейны, возникает дополнительная возможность совмещения кодирующих и декодирующих схем с комбинационной частью линейного КА.

Далее рассматриваются КА, выполненные на двоичных элементах задержки или триггерах и сумматорах по модулю 2. Однако все полученные результаты могут быть легко обобщены на случай p -элементов задержки или триггеров и сумматоров по модулю p (где p — произвольное простое число), при этом только следует

во всех приводимых далее формулах все операции над матрицами понимать уже над $GF(p)$, а не над $GF(2)$.

Рассмотрим сначала важный подкласс линейных КА — автономные линейные КА (АЛКА). Под АЛКА понимается линейный КА с одним входным сигналом (тактирующим). При этом (1) принимает вид

$$a(t+1) = a(t) \otimes T. \quad (3)$$

АЛКА находит широкое распространение в генераторах квазислучайных последовательностей, распределителях импульсов, пересчетных схемах и т. д.

Пусть (m, k) -код, в котором работает АЛКА, задается порождающей матрицей $G = (IP)$, где I — единичная матрица размерами $k \times k$; $P = (p_{ij})$ — матрица избыточных разрядов размерами $k \times (m-k)$. В этом случае избыточные разряды $P(t)$ через информационные $a(t)$ могут быть выражены следующим образом:

$$P(t) = a(t) \otimes P, \quad (4)$$

и, следовательно, с учетом (3) имеем:

$$P(t+1) = a(t) \otimes T \otimes P. \quad (5)$$

Формула (4) описывает работу схемы выработки синдрома, а (5) — работу кодера. Из (4) и (5) следует, что не только схема выработки синдрома, но и кодирующая схема являются линейными. При этом, однако, сложность кодирующей схемы может оказаться существенно меньшей, чем при передаче сообщений (например, в том случае, если число единиц в $T-P$ существенно меньше числа единиц в P). Кроме того, поскольку в самом АЛКА реализуются суммы по модулю 2 значений некоторых элементов памяти, выходные сигналы соответствующих сумматоров схемы T могут быть использованы для выработки синдрома.

Рассмотрим сначала вопрос о синтезе кодирующих и декодирующих схем для одного важного подкласса АЛКА — регистров сдвига с линейными обратными связями.

Некоторые специальные методы коррекции ошибок в регистрах с обратными связями, основанные на использовании циклических кодов, рассмотрены в [1]. Хотя эти методы могут оказываться более экономичными, чем описываемые далее (особенно в случае исправлении ошибок), однако они применимы только для регистров, причем последовательность смены кодовых наборов состояний при использовании этих методов меняется (что является в ряде случаев недопустимым). Кроме того, эти методы не могут быть использованы в условиях помех высокой интенсивности.

Любой регистр с линейными обратными связями может быть задан полиномом

$$q(x) = \sum_{i=0}^k q_i x^i; \quad q_i \in \{0, 1\}$$

(значок Σ означает сумму по модулю 2). Причем для заданного $q(x)$ существуют две реализации (со встроенными и с вынесенными сумматорами), имеющие одинаковую сложность.

Важность изучения методов коррекции ошибок в регистрах с обратными связями вытекает из того, что для любого АЛКА существует регистр, число элементов памяти которого не превышает числа элементов памяти АЛКА, и графы переходов регистра и АЛКА совпадают [2].

Хотя реализация со встроенными и вынесенными сумматорами совпадают по сложности и реализуемым функциям [3], однако сложность кодирующих и декодирующих схем, как будет показано далее, существенно зависит от способа реализации регистра. Для реализации со встроенными сумматорами:

$$T = T^{(1)} = \begin{pmatrix} 010 \dots 0 \\ 001 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 000 \dots 1 \\ q_0 q_1 q_2 \dots q_{k-1} \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} p_{1,1} p_{1,2} \dots p_{1,m-k} \\ p_{2,1} p_{2,2} \dots p_{2,m-k} \\ \dots \dots \dots \\ p_{k,1} p_{k,2} \dots p_{k,m-k} \end{pmatrix};$$

$$T^{(1)} \otimes P = \begin{pmatrix} p_{2,1} p_{2,2} \dots p_{2,m-k} \\ p_{3,1} p_{3,2} \dots p_{3,m-k} \\ \dots \dots \dots \\ p_{k,1} p_{k,2} \dots p_{k,m-k} \\ \sum_{i=1}^k q_{i-1} p_{i,1} \quad \sum_{i=1}^k q_{i-1} p_{i,2} \dots \sum_{i=1}^k q_{i-1} p_{i,m-k} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для реализации с вынесенными сумматорами:

$$T = T^{(2)} = \begin{pmatrix} 00 \dots 0 q_0 \\ 10 \dots 0 q_1 \\ 01 \dots 0 q_2 \\ \dots \dots \dots \\ 00 \dots 1 q_{k-1} \end{pmatrix};$$

$$T^{(2)} \otimes P =$$

$$= \begin{pmatrix} q_0 p_{k,1} q_0 p_{k,2} \dots q_0 p_{k,m-k} \\ p_{1,1} \oplus q_1 p_{k,1} \quad p_{1,2} \oplus q_1 p_{k,2} \dots p_{1,m-k} \oplus q_1 p_{k,m-k} \\ p_{2,1} \oplus q_2 p_{k,1} \quad p_{2,2} \oplus q_2 p_{k,2} \dots p_{2,m-k} \oplus q_2 p_{k,m-k} \\ \dots \dots \dots \\ p_{k-1,1} \oplus q_{k-1} p_{k,1} \quad p_{k-1,2} \oplus q_{k-1} p_{k,2} \dots p_{k-1,m-k} \oplus q_{k-1} p_{k,m-k} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Сравним теперь для реализаций со встроенными и вынесенными сумматорами максимальный выигрыш в числе сумматоров по сравнению с соответствующими схемами для канала связи. При этом будем считать, что в кодирующей схеме и схеме выработки

синдрома функции реализуются независимо (без совместной минимизации). Для реализации со встроенными сумматорами имеем

$$L(P) - L(T^{(1)} \otimes P) \leq m - k \quad (8)$$

(здесь и далее $L(A)$ — число сумматоров в схеме умножения на матрицу A).

Оценим для реализации со встроенными сумматорами выигрыш для схемы выработки синдрома за счет ее соещения с сумматорами регистра. В регистре со встроенными сумматорами реализуются следующие суммы по модулю 2;

$$a_i(t) \oplus q_i a_k(t). \quad (9)$$

Так как для выработки каждого из разрядов синдрома $a_k(t)$ используется не более одного раза, то не более одного из сумматоров, реализующих (9), может быть использовано для реализации каждого из разрядов синдрома. Следовательно, общий выигрыш для схемы выработки синдрома не превышает $m - k$.

Таким образом, с учетом (8) реализация со встроенными сумматорами дает выигрыш как для кодирующей схемы, так и для схемы выработки синдрома, не превышающий $m - k$.

Оценим выигрыш для реализации с вынесенными сумматорами. Из (7) следует, что по 2-й, 3-й, ..., k -й строкам матрицы $T^{(2)} \otimes P$ содержится не менее 1 единицы. Таким образом, при $q_0 = 1$ число единиц в матрице $T^{(2)} \otimes P$ не меньше, чем $\sum_{i=1}^{m-k} p_{k,i} + k - 1$, и, следовательно,

$$L(T^{(2)} \otimes P) \geq \sum_{i=1}^{m-k} p_{k,i} + k - 1 - (m - k) = \sum_{i=1}^{m-k} p_{k,i} + 2k - m - 1. \quad (10)$$

Выигрыш в числе сумматоров для кодирующей схемы при реализации с вынесенными сумматорами оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} L(P) - L(T^{(2)} \otimes P) &\leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-k} p_{i,j} - (m - k) - \sum_{i=1}^{m-k} p_{k,i} - 2k + m + 1 = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{m-k} p_{i,j} - (k - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Если матрица P не содержит одинаковых столбцов, то

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m-k} p_{i,j} \leq 2(k - 1) + (k - 2)(m - k - 2),$$

и, следовательно,

$$L(P) - L(T^{(2)} \otimes P) \leq (k - 2)(m - k - 2) + k - 1. \quad (12)$$

Таким образом, для реализации с вынесенными сумматорами выигрыш в кодирующей схеме не превышает $(m - k - 2)(k - 2) + k - 1$, но может быть больше $m - k$. Это показывает, что реализация с вынесенными сумматорами оказывается в общем случае более экономичной с точки зрения кодирующего устройства.

Оценим выигрыш для схемы выработки синдрома. Схема с вынесенными сумматорами реализует функцию

$$\sum_{i=1}^k a_i q_{i-1},$$

число сумматоров этой схемы не превышает $k - 1$, эти сумматоры могут быть совмещены с сумматорами схемы выработки синдрома, и, следовательно, выигрыш для схемы выработки синдрома не превышает $k - 1$.

Таким образом, верхняя граница выигрыша в числе сумматоров определяется следующей таблицей:

Схема	Реализация	
	встроенные сумматоры	вынесенные сумматоры
Кодер	$m - k$	$(m - k - 2)(k - 2) + k - 1$
Выработка синтеза	$m - k$	$k - 1$

Пример 1. Пусть генератор последовательности максимальной длины описывается неприводимым полиномом [3]

$$q(x) = x^7 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1.$$

Для исправления одиночной ошибки выберем код (11, 7), для которого

$$P = \begin{pmatrix} 1101 \\ 1011 \\ 1110 \\ 1100 \\ 0111 \\ 1010 \\ 1111 \end{pmatrix}$$

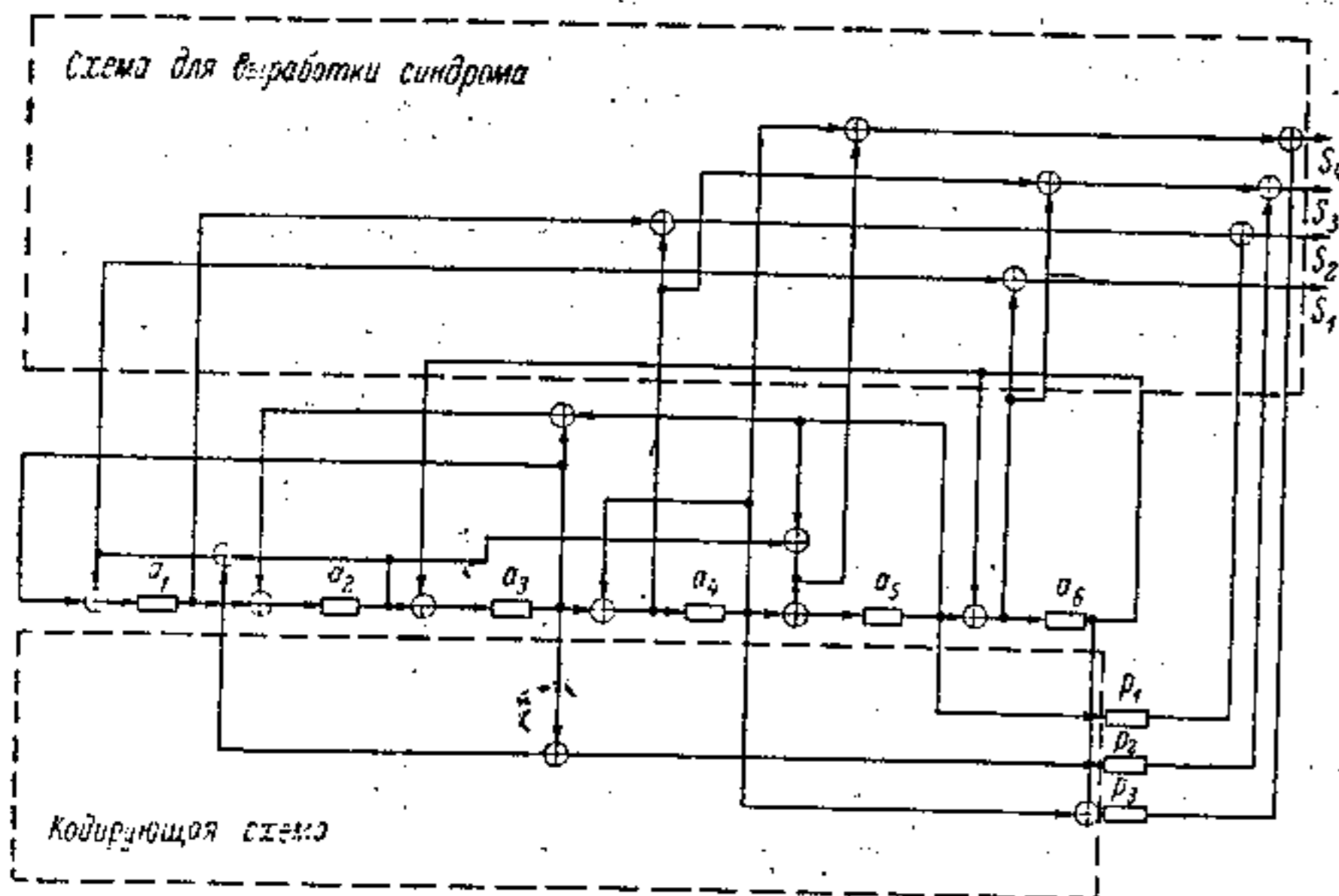
а) Встроенные сумматоры

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0100000 \\ 0010000 \\ 0001000 \\ 0000100 \\ 0000010 \\ 0000001 \\ 1111110 \end{pmatrix}; \quad T^{(1)} \otimes P = \begin{pmatrix} 1011 \\ 1110 \\ 1100 \\ 0111 \\ 1010 \\ 1111 \\ 1001 \end{pmatrix}$$

Для случая $k = r_T$ имеем

$$L_k \geq \sum_{i=1}^{c_1-1} (i-1) C_k^i + (c_1-1) c_2 C_k^{c_1}. \quad (18)$$

Отметим, что границы (17), (18) целесообразно использовать лишь при $c_1 > 1$, т. е. при $m-k > k$.



Пример 3. Оценим сложность кодирующих схем для $(2^k-1, k)$ -кодов Макдональда. Положим $k=r_T$. Тогда

$$m-k = \sum_{i=1}^{k-2} C_k^i + \frac{1}{k} C_k^{k-1},$$

и, следовательно, $c_1 = k-1$; $c_2 = 1/k$ и

$$L_k \geq \sum_{i=1}^{k-2} (i-1) C_k^i + (k-2) = (k-2)(2^{k-1} - k). \quad (19)$$

Верхняя граница для числа L_k сумматоров кодирующего устройства для АЛКА

$$L_k \leq \sum_{j=1}^{m-k} \|p_j\| - (m-k). \quad (20)$$

в) Рассмотрим теперь вопросы выбора корректирующего кода с точки зрения упрощения устройства выработки синдрома.

Пусть p_j есть j -й столбец матрицы P . Найдем для p_j столбец матрицы T (номер его будет обозначать S_j), удовлетворяющий условию

$$\max_S \|T_{S_j} p_j\| = \|T_{S_j} p_j\| \quad (21)$$

(здесь конъюнкция векторов T_{S_j} , p_j понимаются некомпонентно). Тогда для выработки значений j -го избыточного элемента памяти потребуется всего

$$\|p_j\| - 1 - (\|T_{S_j} p_j\| - 1) = \|T_{S_j} p_j\|. \quad (22)$$

сумматоров (здесь T_{S_j} — покомпонентная инверсия T_{S_j}). Таким образом, если $S_j \neq S_i$ при $i \neq j$, то

$$L_c \leq \sum_{j=1}^{m-k} \|T_{S_j} p_j\|. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь другой способ построения АЛКА, работающих в корректирующих кодах, использование которого в ряде случаев оказывается более целесообразным. Этот способ (в отличие от рассмотренного ранее) применим только для невырожденных АЛКА, т. е. АЛКА, для которых $r_T = k$.

При использовании этого способа в момент t по состоянию $a(t)$ кодирующая схема выбатывает состояние $P(t)$ и одновременно состояние $a(t+1)$. Затем по $a(t+1)$ и $P(t)$ производятся декодирование и коррекция ошибок.

Корректирующая способность матрицы P при использовании этого способа сохраняется.

Кодирующая схема при использовании этого способа, как и при передаче сообщений, описывается формулой

$$P(t) = a(t) \otimes P. \quad (24)$$

Так как $a(t+1) = a(t) \otimes T$ и $r_T = k$, то

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= a(t+1) \otimes T^{-1}; \\ P(t) &= a(t+1) \otimes T^{-1} \otimes P. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Формула (25) описывает работу схемы выработки синдрома. Из сравнения (24), (25) с (5), (4) видно, что если $T^{-1} \otimes P$ реализуется проще $T \otimes P$, то использование второго способа может оказаться более предпочтительным.

Выбор кода при использовании второго способа может быть осуществлен аналогично изложенному ранее для первого способа. Для регистров сдвига и для счетчиков оба способа полностью равноценны.

Первый способ может быть полностью перенесен и на произвольные линейные КА, функция переходов которых описывается выражением (1).

Рассмотрим в качестве примера декодирующее устройство для циклического кода. При этом $x(t) = (x^{(1)}(t), 0, 0, \dots, 0)$; $x^{(1)}(t) \in \{0, 1\}$; k — единичная матрица размерами $k \times k$.

Кодирующая схема для этого устройства описывается формулой

$$P(t+1) = a(t) \otimes T \otimes P \otimes x(t+1) \otimes R \otimes P = \\ = a(t) \otimes T \otimes P \otimes x^{(1)}(t+1) \otimes P_1, \quad (26)$$

где P_1 — первый столбец P .

Таким образом, при выборе кода для коррекции ошибок в декодирующем устройстве циклического кода могут быть использованы те же соображения, что и для регистра с линейными обратными связями, только при этом следует также добиваться минимума P_1 .

Литература

1. Радченко А. Н. Примеры повышения надежности методом внутрисхемного кодирования состояний. Изд. ЛДНТП, 1964.
2. Элсас Б. Теория автономных линейных последовательностных сетей. Кибернетический сб., вып. 7, ИЛ, М., 1963.
3. Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. Изд. «Мир», М., 1964.

С. П. Шекрасов

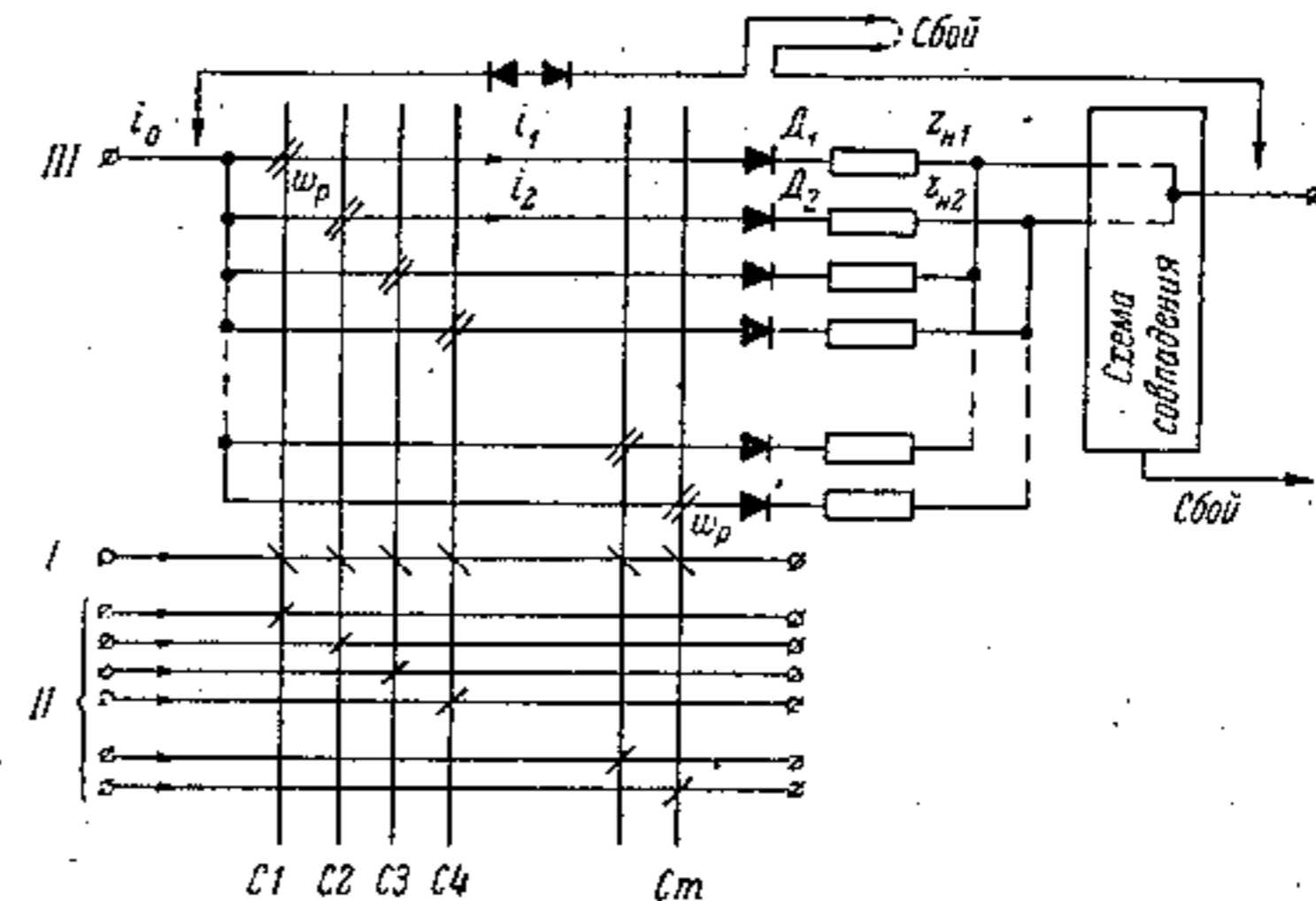
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИЗБЫТОЧНОСТИ СХЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ИХ САМОКОНТРОЛЯ

В настоящее время все большее распространение получают вычислительные схемы распределения тока (схемы РТ), использующие ленточные или ферритовые магнитные сердечники и полупроводниковые диоды, а также импульсные формирователи тока на транзисторах [1]. На рисунке приведен основной элемент таких схем — ключ на m выходов. В первом и втором тактах сердечники ключа готовятся так, что только один из них оказывается в состоянии «вверх». В третьем такте поступает импульс тока на вход III; этот ток почти весь проходит по обмотке w_p сердечника, подготовленного вверх. По всем другим ветвям ключа проходят ложные токи, величина которых ниже порога чувствительности элементов нагрузки.

Схема на рисунке избыточна в том смысле, что из 2^m возможных состояний сердечников используется только m состояний, каждое

из которых характеризуется наличием какой-либо одной проводящей ветви ключа. Отказ от такого ограничения ведет к существенному изменению электротехнического режима схемы и в конечном итоге к потере основного преимущества схем РТ — возможности введения практически неограниченных расчетных запасов.

Таким образом, схемам РТ органически присуща некоторая избыточность. Естественно попытаться использовать эту избыточность для организации самоконтроля схем.



Элементарная схема РТ и приемы ее контроля.

При появлении в схеме РТ различных неисправностей (обрывы, замыкания, отказ диодов) она переходит в аварийный режим, отличающийся от нормального определенными признаками. Существуют два аварийных режима. Первый из них возникает при обрыве проводящей ветви ключа и при таких нарушениях подготовки сердечников, когда все они к началу третьего такта оказываются в состоянии вниз. Рассмотрим режим обрыва для случая, когда схема содержит только три сердечника $C1-C3$. Предположим, что сердечник $C2$ подготовлен вверх, но что эта ветвь ключа оборвана.

В третьем такте при аварии работа ключа характеризуется тремя этапами длительностью t_1, t_2, t_3 , причем $t_1 + t_2 + t_3 = t_n$ (t_n — длительность импульса тока). На первом этапе из-за отсутствия в ключе проводящей ветви почти все напряжение питания приложено к обмоткам w_p сердечников $C1$ и $C2$. В нормальном режиме напряжение питания примерно поровну прикладывается к каждому из нескольких ключей, последовательно включенных в цепь одного формирователя. Резкое повышение падения напря-