МЕТОД КОДИРОВАНИЯ ДЛЯ БЕЗЫЗБЫТОЧНЫХ АВТОМАТОВ С КОРРЕКЦИЕЙ ОШИБОК

М.Г.Карповский, А.А.Трояновский

Предложен приближенный метод отыскания оптимального, для коррекции ошибок кратности не выше ℓ, кодирования входных сигналов и состояний. Метод сводится к $(\log_2 n_x + \log_2 n_q - 2)$ кратному применению "венгерского алгоритма" на квадратных симметричных матрицах с экспоненциально убывающими размерами.

Пусть минимальный автомат $M = (X, Y, Q, \delta, \lambda)$, где

$\delta : X \times Q \Rightarrow Q$ - функция переходов,

$\lambda : X \times Q \Rightarrow Y$ - функция выходов,

X, Y, Q алфавиты входов, выходов и состояний, соответственно, задан матрицей (δ_{ij}) где $\delta_{ij} = \delta(x_i, q_j)$. Обозначим n_x и n_q - число входных сигналов и состояний, соответственно, и допустим, для определенности, что $n_x = 2^c$, $n_q = 2^d$, $Y = Q$. Будем также полагать, что в качестве структурного алфавита выбран двоичный алфавит, т.е. $X = \{0,1\}^c$, $Q = Y = \{0,1\}^d$. Число исправляемых ошибок кратности не выше ℓ [I] во входных сигналах (состояниях) при кодировании $R(x)$ $(R(q))$ обозначим $\eta_\ell(R(x))$ $(\eta_\ell(R(q)))$.

Далее будут рассматриваться следующие две основные задачи. Пусть K_x -множество всех кодирований входных сигналов и K_q-множество всех кодирований внутренних состояний заданного автомата

I. Найти $R_{opt}(x) \in K_x$, такое, что

$$\eta_\ell(R_{opt}(x)) = \max_{R(x) \in K_x} \eta_\ell(R(x)) \qquad (I)$$

2. Найти $R_{opt}(q) \in K_q$, такое, что

$$\eta_\ell(R_{opt}(q)) = \max_{R(q) \in K_q} \eta_\ell(R(q)) \qquad (2)$$

Для решения этих задач предлагается единый приближенный метод основанный на использовании "венгерского алгоритма" [2] Рассмотрим предлагаемый метод сначала при $\ell = 1$

Введем метрики $\rho_1(x_i, x_j)$ и $\rho_1(q_i, q_j)$ на алфавитах X и Q:

$$\rho_1(x_i, x_j) = \sum_{s=1}^{n_q} \tau_1(q_{is}, q_{js}) \qquad (3)$$

$$\rho_1(q_i, q_j) = \sum_{s=1}^{n_x} \tau_1(q_{si}, q_{sj}) \qquad (4)$$

где

$$\tau_1(q_{\alpha\beta}, q_{\gamma\delta}) = \begin{cases} 0 & \text{при } q_{\alpha\beta} = q_{\gamma\delta} \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (5)$$

и в соответствии с (3), (4) и (5) построим матрицы расстояний между выходными сигналами $\left(\rho_1(x_i, x_j)\right)$ и между состояниями $\left(\rho_1(q_i, q_j)\right)$

Под минимальной симметричной связкой для матрицы будем понимать множество элементов этой матрицы, удовлетворяющее следующим трем условиям:

I. Каждой строке и каждому столбцу матрицы принадлежит в точности один элемент связки.

2. Элементы связки расположены симметрично относительно главной диагонали.

3. Среди всех множеств, удовлетворяющих для данной матрицы условиям I. и 2., минимальной связкой является та, сумма элементов, которой минимальна.

Мы будем, кроме того, рассматривать связки, которые не содержат диагональных элементов матрицы. Задача отыскания минимальных связок на матрице может быть весьма просто решена с помощью "венгерского алгоритма" [2]

<u>Первый шаг алгоритма</u> состоит в построении по исходной матрице (δ_{ij}) матриц расстояний $\left(\rho_1(x_i, x_j)\right)$ и $\left(\rho_1(q_i, q_j)\right)$ и нахождении с помощью "венгерского алгоритма" минимальных симметричных связок $C_1(x)$ и $C_1(q)$ на них.

Если $\rho_1(p,t) \in C_1(x)$ $(\rho_1(p,t) \in C_1(q))$, то (x_p, x_t) $((q_p, q_t))$ кодируются наборами, отличающимися лишь в последнем (младшем) разряде.

Перейдем по второму шагу алгоритма. Занумеруем элементами $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{2^{c-1}}^{(2)}$ пары p, t, такие, что $\rho_1(p,t) \in C_1(x)$ и элементами $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \ldots, q_{2^{d-1}}^{(2)}$ — пары p, t такие, что $\rho_1(p,t) \in C_1(q)$ и построим матрицы $\left(\rho_2(x_i^{(2)}, x_j^{(2)})\right)$ и $\left(\rho_2(q_i^{(2)}, q_j^{(2)})\right)$ расстояний

между парами $(x_i^{(2)}, x_j^{(2)})$ входных сигналов и $(q_i^{(2)}, q_j^{(2)})$ -состояний следующим образом.

Если $x_i^{(2)} = (x_{i_1}, x_{i_2})$ и $x_j^{(2)} = (x_{j_1}, x_{j_2})$; $((i_1, i_2) \in C_1(x), (j_1, j_2) \in C_1(x))$, то

$$\tau_2((q_{i_1 s}, q_{i_2 s}), (q_{j_1 s}, q_{j_2 s})) = \begin{cases} 2 \text{ при } q_{i_1,s} \neq q_{j_1,s} \text{ и } q_{i_2,s} \neq q_{j_2,s} \\ 1 \text{ при } q_{i_1,s} = q_{j_1,s} \text{ и } q_{i_2,s} \neq q_{j_2,s} \text{ или } q_{i_1,s} \neq q_{j_1,s} \text{ и } q_{j_2,s} = q_{i_2,s} \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \quad (6)$$

и

$$\rho_2(x_i^{(2)}, x_j^{(2)}) = \sum_{s=1}^{n_q} \tau_2((q_{i_1,s}, q_{i_2,s}), (q_{j_1,s}, q_{j_2,s})) \quad (7)$$

Аналогично определяется и матрица $\left(\rho_2(q_i^{(2)}, q_j^{(2)})\right)$.

<u>Второй шаг алгоритма</u> состоит в построении матриц $\left(\rho_2(x_i^{(2)}, x_j^{(2)})\right)$ и $\left(\rho_2(q_i^{(2)}, q_j^{(2)})\right)$ и нахождении с помощью "венгерского алгоритма" минимальных связок $C_2(x)$ и $C_2(q)$ на них.

Каждый элемент связки $C_2(x)$ $(C_2(q))$ определяет уже пары входных сигналов (состояний). Элементы связки кодируем таким образом, чтобы они отличались лишь в двух младших разрядах.

Полностью аналогично осуществляются последующие шаги алгоритма. Единственное отличие состоит в построении функций τ_g на g -ом шаге $(g = 1,2,\ldots,c$ или $g = 1,2,\ldots,d)$ Функция τ_g используется для определения расстояния $\rho_g(x_i^{(g)}, x_j^{(g)})$ или $\rho_g(q_i^{(g)}, q_j^{(g)})$ на g -ом шаге, причем $x_i^{(g)}$ (или $q_i^{(g)}$) представляют собою упорядоченные множества, содержащие 2^{g-1} элементов. Пусть

$x_i^{(g)} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2^{g-1}}})$; $x_j^{(g)} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{2^{g-1}}})$ $(x_{i_s}, x_{j_s} \in X)$

Тогда $\tau_g(x_i^{(g)}, x_j^{(g)})$ равно числу несовпадающих элементов в векторах $x_i^{(g)}$ и $x_j^{(g)}$. Аналогично определяется τ_g для состояний.

<u>Теорема I</u>

$$\eta_1(R(x)) = n_x \cdot n_q \cdot \log_2 n_x - \sum_{i=1}^{\log_2 n_x} |C_i(x)| \quad (8)$$

$$\eta_1(R(q)) = n_x \cdot n_q \cdot \log_2 n_q - \sum_{j=1}^{\log_2 n_q} |C_j(q)| \quad (9)$$

(Здесь $|C_w|$ - сумма элементов, входящих в связку C_w

Из теоремы I следует, что для повышения корректирующей способности необходимо так кодировать входные сигналы состояния чтобы минимизировать величину $\sum_{i=1}^{\log_2 n_x} |C_i(x)|$ и $\sum_{j=1}^{\log_2 n_q} |C_j(q)|$.

Описанный алгоритм отыскания оптимального кодирования является приближенным, т.к. он обеспечивает абсолютный минимум $|C_1(x)|$ и $|C_1(q)|$, т.е. максимальное число исправляемых ошибок в младших разрядах кода входного сигнала и состояния и некоторые относительные минимумы для $|C_i(x)|$ и $|C_j(q)|$ при $i,j \geq 2$. Можно показать, что при $\ell = 1$ алгоритм позволяет минимизировать сложность комбинационной части автомата.

Перейдем теперь к случаю, когда $\ell > 1$ и опишем другой способ построения функций τ_g. Пусть $\vec{q}_i = (q_{s,i_1}, q_{s,i_2}, \ldots, q_{s,i_{2^g-1}})$ и $\vec{q}_j = (q_{s,j_1}, q_{s,j_2}, \ldots, q_{s,j_{2^g-1}})$ где $q_{s,i_k}, q_{s,j_k} \in Q$ два вектора длины 2^{g-1}. Построим характеристические функции векторов $\vec{q}_i$ и $\vec{q}_j$ следующим образом

$$q_{it}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } q_{s,i_z} = q_t \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (z \in \{0, 1, \ldots, 2^g - 1\}) \qquad (10)$$

$$q_{jt}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } q_{s,j_z} = q_t \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (11)$$

Под функцией взаимной корреляции характеристических функций $q_{it}(z)$ и $q_{jt}(z)$ будем понимать функцию

$$B_t^{(i,j)}(\tau) = \sum_{z=0}^{2^g-1} q_{it}(z)\, q_{jt}(z \oplus \tau) \pmod 2 \qquad (12)$$

Под суммарной функцией взаимной корреляции векторов $\vec{q}_i$ и $\vec{q}_j$ будем понимать функцию

$$B^{(i,j)}(\tau) = \sum_{t=0}^{n_q-1} B_t^{(i,j)}(\tau) \qquad (13)$$

Отметим, что функция взаимной корреляции связана с исходными функциями через дискретное преобразование W Уолша [3] следующим соотношением

$$B_t^{(i,j)} = 2^{2g-2}\, W(W(q_{it})\, W(q_{jt})) \qquad (14)$$

что дает возможность простой "машинной" реализации вычисления $B^{(i,j)}$ с помощью "быстрого" преобразования Адамара-Уолша [3]

Опишем g-ый шаг рассматриваемого алгоритма. Матрица $(\rho_g(q_i^{(g)}, q_j^{(g)}))$ $((\rho_g(x_i^{(g)}, x_j^{(g)})))$ определяется так

$$\rho_g(q_i^{(g)}, q_j^{(g)}) = \sum_{s=0}^{n_x-1} \tau_g((q_{s,i_1}, q_{s,i_2}, \ldots, q_{s,i_{2^g-1}}), (q_{s,j_1}, q_{s,j_2}, \ldots, q_{s,j_{2^g-1}})) \qquad (15)$$

где $q_i^{(g)} = (q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_{2^g-1}})$; $q_j^{(g)} = (q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_{2^g-1}})$

$$\left(\rho_g(x_i^{(g)}, x_j^{(g)}) = \sum_{s=0}^{n_q-1} \tau_g((q_{i_1,s}, q_{i_2,s}, \ldots, q_{i_{2^g-1},s}), (q_{j_1,s}, q_{j_2,s}, \ldots, q_{j_{2^g-1},s}))\right) \qquad (16)$$

где $x_i^{(g)} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2^g-1}})$; $x_j^{(g)} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{2^g-1}})$

Здесь $q_{\alpha\beta}$ – состояние, в которое переходит автомат из состояния q_β под действием входного сигнала x_α.

Пусть в результате предыдущих $g-1$ шагов образованы вектора из 2^{g-1} состояний (2^{g-1} входных сигналов) $q_i^{(g)}$ и $q_j^{(g)}$ ($x_i^{(g)}$ и $x_j^{(g)}$)

$\vec{q}_i = (q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_{2^g-1}})$, $\vec{q}_j = (q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_{2^g-1}})$

($\vec{x}_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2^g-1}})$, $\vec{x}_j = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{2^g-1}})$)

Рассмотрим вектора

$\vec{q}_{s,i}^{(g)} = (q_{s,i_1}, q_{s,i_2}, \ldots, q_{s,i_{2^g-1}})$; $\vec{q}_{s,j}^{(g)} = (q_{s,j_1}, q_{s,j_2}, \ldots, q_{s,j_{2^g-1}})$

($\vec{q}_{i,s}^{(g)} = (q_{i_1,s}, q_{i_2,s}, \ldots, q_{i_{2^g-1},s})$; $\vec{q}_{j,s}^{(g)} = (q_{j_1,s}, q_{j_2,s}, \ldots, q_{j_{2^g-1},s})$)

Построим в соответствии с (12) и (13) суммарные функции автокорреляции $B^{(si,sj)}(\tau)$ ($B^{(is,js)}(\tau)$) между векторами $\vec{q}_{s,i}^{(g)}$ и $\vec{q}_{s,j}^{(g)}$ ($\vec{q}_{i,s}^{(g)}$ и $\vec{q}_{j,s}^{(g)}$). Тогда

$$\tau_g(\vec{q}_{s,i}^{(g)}, \vec{q}_{s,j}^{(g)}) = \sum_{|\tau| \leq \ell-1} B^{(si,sj)}(\tau) \qquad (17)$$

$$\left(\tau_g(\vec{q}_{i,s}^{(g)}, \vec{q}_{j,s}^{(g)}) = \sum_{|\tau| \leq \ell-1} B^{(is,js)}(\tau)\right) \qquad (18)$$

На построенных в соответствии с (15) и (16) матрицах находим минимальные связки и переходим к следующему шагу алгоритма.

Легко заметить, что последний метод построения матриц расстояний является обобщением приведенного ранее метода построения матриц для одиночных ошибок. Кроме того, на последний метод обобщается теорема I; отсюда, как и ранее следует необходимость минимизации суммы элементов входящих в связки.

Описанный алгоритм кодирования может быть обощен на частично определенные автоматы и автоматы с числом входных сигналов и состояний не равным степени двойки.

Литература.

1. У.Питерсон. Коды исправляющие ошибки. Изд. "Мир", М., 1964.
2. А.Кофман. Методы и модели исследования операций. Изд."Мир", М., 1966.
3. А.М.Трахтман. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. Изд."Сов.Радио", М., 1972.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ С ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ

Г.А.Каспаров

/Ленинград/

В работе исследуется влияние избыточных переменных состояния на чувствительность схемных функций. Определяются функции чувствительности, являющиеся инвариантами преобразования и показывается, что искусственное введение избыточных переменных состояния уменьшает некоторые функции чувствительности.

Влияние избыточности на чувствительность схемной функции электрической цепи рассматривалось в ряде работ [1,3,4]. Например, в [3] показано, что естественная избыточность электрической цепи, обусловленная неопределенностью системы алгебраических уравнений, связывающих коэффициенты операторной функции с значениями элементов цепи может быть использована для уменьшения чувствительности передаточных функций корректирующих цепей. При этом задача определения величин элементов сводится к задаче нелинейного программирования. Из [4] также следует, что даже простое разделение каждого элемента на два элемента уменьшает статистическую чувствительность, оставляя, однако, чувствительность для наихудшего случая без изменения. На возможность уменьшения чувствительности рабочего затухания фильтра при увеличении порядка аппроксимирующей функции указывается в работе [1].

Вместе с тем, следует признать, что в настоящее время