Из теорем 7 и 9 следует, что функции $R_T(x)$ обладают высокой корректирующей способностью в области ошибок малой кратности.

Выводы:

I. Способность системы ФАЛ корректировать ошибки заданного класса определяется особенностями функций, входящих в систему, и даже при минимальном представлении ФАЛ эта способность может сохраняться.

2. Автокорреляционные по модулю p функции определяют удобный и естественный способ анализа корректирующей способности систем ФАЛ. Связь автокорреляционных функций с исходной функцией через двойное спектральное преобразование определяет простой "машинный" способ их вычисления с помощью повторного использования быстрого преобразования Адамара-Крестенсона (Уолша – при $p=2$)

3. При синтезе комбинационных схем реализующих систему БФ, целесообразно использовать представления отдельных функций системы в виде суперпозиции монотонных /положительных или отрицательных/ функций. Такого рода представлениям соответствуют, например, реализации систем БФ на пороговых элементах и, в частности, на пороговых элементах с весами $\{2^0, 2^1, \dots, 2^{k-1}\}$

4. При необходимости коррекции ошибок в схеме, реализующей систему булевых функций, ошибок кратности K (где K – число аргументов системы) целесообразно строить схему в соответствии с представлением отдельных функций системы в виде суперпозиции антисамодвойственных функций.

Литература

I. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. Изд."Сов. Радио", М., 1972.

АНАЛИЗ КОРРЕКТИРУЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ АВТОМАТОВ

М.Г.Карповский, А.А.Трояновский

Описываются методы анализа корректирующей способности $\eta_K(f)$ абстрактных автоматов и автоматов с произвольными структурными алфавитами. Показано, что способность автоматов корректировать ошибки заданного класса K определяется свойствами реализуемого ими отображения f и может сохраняться даже для минимальных автоматов.

Рассмотрены способы оценки $\eta_K(f)$ при разных способах задания автоматов и для различных классов ошибок K. В частности, если множество слов алфавита образует коммутативную группу G_m и класс ошибок на G_m описывается в терминах групповой операции /например, ошибки заданной кратности/, то для оценки $\eta_K(f)$ используются корреляционные функции. Связь корреляционных функций с исходными через двойное дискретное спектральное преобразование позволяет использовать для оценки $\eta_K(f)$ аппарат спектральных преобразований.

Пусть задан минимальный автомат $M=(X,Y,Q,\delta,\lambda)$ где

$\delta: X\times Q\Rightarrow Q$ – функция переходов,

$\lambda: X\times Q\Rightarrow Y$ – функция выходов,

X, Y, Q – алфавиты входов, выходов и состояний соответственно, и пусть f – отображение "вход-выход", реализуемое этим автоматом. Автомат исправляет множество ошибок тогда и только тогда, если для любых $(u,u')\in R$

$$f(u)=f(u') \qquad (1)$$

Корректирующей способностью f на множестве R будем называть число $\eta_R(f)$ исправляемых ошибок. В настоящей работе рассматриваются вопросы оценки $\eta_R(f)$ для заданного автомата. Как будет показано далее способность автомата M корректировать ошибки определенного класса R зависит от отображения f, реализуемого M, причем эта способность может сохраняться и для минимальных автоматов.

Обозначим n_x – мощность X; n_q – мощность Q; $F_m(X)$ множество входных слов длины, не превышающей m. Будем считать, что пустое слово также принадлежит к $F_m(X)$; $Y=Q$, и отображение $f=f_m$ определяется для M следующим образом:

$$f_m(x)=\lambda(\delta(x_m,\delta(x_{m-1},\dots,\delta(x_1,q_0)\dots))) \qquad (2)$$

Здесь $x=x_1x_2\dots x_m\in F_m(X)$ $(x_i\in X)$ и q_0 – начальное состояние M.

Пусть $\{F_m^{(i)}(X)\}$ $(i=1,2,\dots,N_m)$ – фактор-множество $F_m(X)$ по эквивалентности Майхилла [1] и $|F_m^{(i)}(X)|$ – мощность класса $F_m^{(i)}(X)$.

<u>Теорема 1</u> Для любого $m>0$

$$\eta_{F_m^2(X)}(f_m)=\sum_{i=1}^{N_m}|F_m^{(i)}(X)| \qquad (3)$$

<u>Теорема 2</u> Пусть N – мощность фактор-полугруппы входной полугруппы $F_m(X)$ по подполугруппе слов над алфавитом X, эквивалентных по Майхиллу пустому слову, тогда для любого $m>0$

$$\frac{(n_x^{m+1}-1)^2}{(n_x-1)N}\leqslant\eta_{F_m^2(X)}(f_m)\leqslant\frac{(n_x^{m+1}-1)^2}{n_x-1} \qquad (4)$$

Опишем теперь другой способ определения $\eta_R(f)$. Пусть задан автомат M. Обозначим $\tilde F_m(X)$ – множество входных слов длины m и предположим, что $Y=Q$ и $f=f_m$ определяется следующим образом:

$$f_m(x)=\lambda(\delta(x_m,\delta(x_{m-1},\dots,\delta(x_1,q_0)\dots))) \qquad (5)$$

где $x_1x_2\dots x_m\in\tilde F_m(X)$ $(x_i\in X)$

Построим для отображения f_m систему характеристических функций $\{f_i(x)\}$ $(i=0,1,\dots,n_q-1)$

$$f_i(x)=\begin{cases}1 & \text{при } f_m(x)=q_i\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases} \qquad (6)$$

<u>Теорема 3</u>

$$\eta_{\tilde F_m^2(X)}(f_m)=\sum_{i=0}^{n_q-1}\sum_{(x,x')\in\tilde F_m^2(X)}f_i(x)\cdot f_i(x') \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь способы определения $\eta_R(f)$ в случае, когда автомат M задан таблицей переходов. Для определенности будем, как и раньше, полагать $Q=Y$

Под ошибкой во входном сигнале (состоянии) для автомата M будем понимать упорядоченную пару $\gamma_x=(x_i,x_j)$ где $x_i,x_j\in X$ $(\gamma_q=(q_i,q_j)$, где $q_i,q_j\in Q)$. Автомат M исправляет множество ошибок $\Gamma_x\subseteq X^2$ $(\Gamma_q\subseteq Q^2)$ тогда и только тогда, если для любых $(x_i,x_j)\in\Gamma_x$ $((q_i,q_j)\in\Gamma_q)$

$$\delta(x_i,q)=\delta(x_j,q);\quad(\delta(x,q_i)=\delta(x,q_j)) \qquad (8)$$

Для заданного автомата M построим систему характеристических функций $\{f_i\}$ следующим образом

$$f_i(x,q)=\begin{cases}1 & \text{при } \delta(x,q)=q_i \quad (i=0,1,\dots,n_q-1)\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases} \qquad (9)$$

Тогда, в соответствии с (9), корректирующая способность автомата M по отношению к ошибкам только во входных сигналах (состояниях) определяется следующим соотношением:

$$\ell_{\Gamma_x}(\delta)=\sum_{i=0}^{n_q-1}\sum_{\delta_x\in\Gamma_x} f_i(x,q)\, f_i(x',q) \qquad (10)$$

$$\ell_{\Gamma_q}(\delta)=\sum_{i=0}^{n_q-1}\sum_{\delta_q\in\Gamma_q} f_i(x,q)\, f_i(x,q') \qquad (11)$$

В случае одновременных ошибок во входных сигналах и в состояниях

$$\ell_{\Gamma_q\times\Gamma_x}(\delta)=\sum_{i=0}^{n_q-1}\sum_{\delta_x,\delta_q} f_i(x,q)\, f_i(x',q') . \qquad (12)$$

Укажем еще на один способ определения ℓ_R в случае, когда множество ошибок R состоит из всевозможных ошибок во входных сигналах (состояниях), а состояния (входные сигналы) безошибочны. В этом случае

$$R=\Gamma_x^{(q)}=Q\times X^2 ;\quad (R=\Gamma_q^{(x)}=X\times Q^2) \qquad (13)$$

Обозначим $H_x(i,j)$ - число состояний q_i в j-ой строке и $H_q(i,j)$ - число состояний q_j в i-ом столбце таблицы переходов.

Теорема 4

$$\ell_{\Gamma_x^{(q)}}(\delta)=\sum_{i=0}^{n_q-1}\sum_{j=0}^{n_x-1} H_q(i,j)\,(H_q(i,j)-1) \qquad (14)$$

$$(\ell_{\Gamma_q^{(x)}}(\delta)=\sum_{i=0}^{n_q-1}\sum_{j=0}^{n_x-1} H_x(i,j)\,(H_x(i,j)-1) \qquad (15)$$

Предположим теперь, что множество входных слов $\tilde f_m(X)$ образует коммутативную группу G_m, в терминах групповой операции которой удается описать класс ошибок на множестве G_m. Обозначим через $*$ групповую операцию для G_m и допустим, что класс R рассматриваемых ошибок определяется так

$$R\subseteq\{(x,x')\,|\,x,x'\in G_m;\ x*(x')^{-1}\in G_m\} \qquad (16)$$

Следствие 1 теоремы 3.

$$\ell_{G_m^2}(f_M)=\sum_{\delta\in R}\sum_{i=0}^{n_q-1} B_{*,i}(\delta) , \qquad (17)$$

где

$$B_{*,i}(\delta)=\sum_{x\in G_m} f_i(x)\, f_i(x*\delta^{-1}) \qquad (18)$$

Функцию $B_{*,i}(\delta)$ назовем функцией автокорреляции характери-

стической функции f_i на группе G_m. Для упрощения построения $B_{*,i}(\delta)$ в ряде случаев оказывается полезной связь между исходной функцией f_i и функцией автокорреляции $B_{*,i}(\delta)$ через двойное спектральное преобразование функции f_i. Обозначим через $\mathcal{S}$ спектральное преобразование над G_m, сопоставляющее функции, заданной на G_m последовательность коэффициентов её разложения по характерам группы G_m [2]. Через $\mathcal{S}^{-1}$ обозначим функциональное преобразование обратное $\mathcal{S}$; через $\bar{\mathcal{S}}$ - комплексно сопряженное $\mathcal{S}$.

Теорема 5

$$B_{*,i}(\delta)=|G_m|^2\,\mathcal{S}^{-1}\big(\mathcal{S}(f_i)\,\overline{\mathcal{S}(f_i)}\big)(\delta) \qquad (19)$$

Использование теоремы 5 позволяет применять для вычисления $B_{*,i}(\delta)$ (а, следовательно, и $\ell_R(f)$) "Быстрое преобразование Фурье" [3], что дает возможность простой реализации алгоритма вычисления $\ell_R(f)$ на ЭЦВМ.

Теорема 6 Пусть заданы два автомата M и M_α реализующие, соответственно, отображения f и f_α над одной и той же группой G_m, причем $\alpha\in G_m$ и для любого $u\in G_m$

$$f(u)=f_\alpha(\alpha*u) \qquad (20)$$

тогда

$$\ell_{G_m^2}(f)=\ell_{G_m^2}(f_\alpha) \qquad (21)$$

Нетрудно показать, что если входные сигналы (состояния) автомата M, заданного таблицей переходов, образуют группу G_m относительно операции $*$ ($\circledast$) и класс ошибок определяется как

$$\Gamma_x=\{(x,x')\,|\,x,x'\in X;\ x*(x')^{-1}\in X\} \qquad (22)$$

$$(\Gamma_q=\{(q,q')\,|\,q,q'\in Q;\ q\circledast(q')^{-1}\in Q\}) \qquad (23)$$

то, в частности,

$$\ell_{\Gamma_q}(\delta)=\sum_{i=0}^{n_q-1}\sum_{\delta_q\in\Gamma_q} B_{\circledast,i}(\delta_q) \qquad (24)$$

где

$$B_{\circledast,i}(\delta)=\sum_{x,q} f_i(x,q)\, f_i(x,q\circledast\delta_q^{-1}) \qquad (25)$$

$$\ell_{r_q \times r_x}(\delta)=\sum_{i=0}^{n_y-1}\sum_{\delta_x,\delta_q} B_{*,\circledast,i}(\delta_x,\delta_q) \qquad (26)$$

где
$$B_{*,\circledast,i}(\delta_x,\delta_q)=\sum_{x,q} f_i(x,q)\,f_i(x*\delta_x^{-1},q\circledast\delta_q^{-1}) \qquad (27)$$

Перейдем теперь к анализу $\ell_k(f)$ для автоматов со структурными входным и внутренним алфавитами. При этом предполагается, что входные системы и состояния автомата M, определяемого (5) закодированы p-ичными векторами длины k. Под неарифметической ℓ-кратной ошибкой будем понимать ошибку (u,u'), для которой

$$\| u \ominus u' \| = \ell \qquad (\mathrm{mod}\, p) \qquad (28)$$

(здесь $\|u\|$ означает число ненулевых компонент u, а запись $\ominus\,(\mathrm{mod}\,p)$ – операцию покомпонентного вычитания векторов по модулю p.

Прежде, чем дать определение для арифметических ошибок, построим для входного слова $x\in X^m$ матрицу $(\tilde{x})$ размерами $k\times m$. Образуем из $(\tilde{x})$ два вектора x^{I} и x^{II}. Длина x^{I} (x^{II}) равна m (k) а компонентами его будут числа, p-ичные разложения которых образуют столбцы (строки) $(\tilde{x})$. Под ℓ-кратной последовательной (параллельной) арифметической входной ошибкой будем понимать ошибку (x,x') ($x,x'\in X^m$) для которой

$$\| x^{II} \ominus (x')^{II} \| = \ell \qquad (\mathrm{mod}\, p^m) \qquad (29)$$

$$\left(\| x^{I} \ominus (x')^{I} \| = \ell \qquad (\mathrm{mod}\, p^k) \right) \qquad (30)$$

Аналогично определяются арифметические ошибки для состояний. Легко показать, что соотношения (I6) – (27) сохраняются и для автоматов со структурными алфавитами. При этом вместо операций $*$, $\circledast$ используются $\ominus\,(\mathrm{mod}\,p^k)$, $\ominus\,(\mathrm{mod}\,p^m)$ или $\ominus\,(\mathrm{mod}\,p)$, в зависимости от класса ошибок. В частности, в случае $p=2$ и арифметических ошибок соотношение (I9) приводится к виду

$$B_{\oplus,i}(\delta)=2^{2k}\,W(W^2(f_i))(\gamma) \qquad (31)$$

$\oplus$ – суммирование по модулю 2, а W-преобразование Уолша [3]

В заключение отметим, что приведенные результаты обобща-

ются на случаи неминимальных автоматов и $n_y=|Y|\neq|Q|$

В первом случае характеристические функции $\{f_i\}$ имеют вид

$$f_i(x,q)=\begin{cases} 1 \text{ при } \lambda(x,q)=y_i & (i=0,1,\dots,n_y-1) \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \qquad (32)$$

Во втором случае – если $\mathcal{X}=\{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\dots,\mathcal{X}_{n_\mathcal{X}}\}$ – разбиение множества состояний автомата на классы эквивалентности, то полагаем

$$f_i(x,q)=\begin{cases} 1 \text{ при } f(x,q)\in\mathcal{X} & (i=0,1,\dots,n_\mathcal{X}-1) \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \qquad (33)$$

Литература

I. Р.Калман, П.Фалб, М.Арбиб. Очерки по математической теории систем. Изд. "Мир", М., I97I

2. К.П.Серр. Линейные представления конечных групп. Изд. "Мир", М., 1970

3. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. Изд. "Сов. Радио", М., 1972.